7 класс

ГЕОМЕТРИЯ

ФГОС

УМК

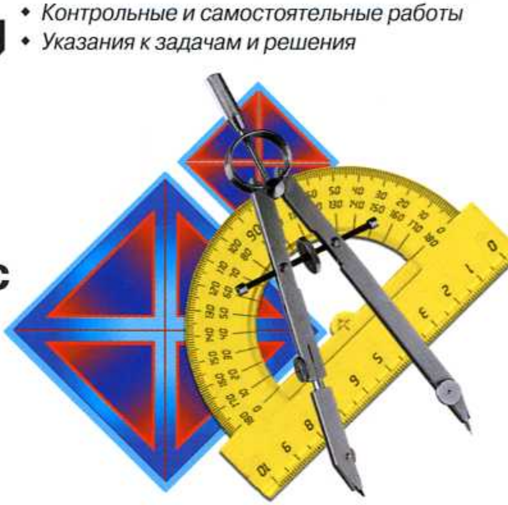
Т. М. Мищенко

Дидактические материалы и методические рекомендации для учителя по геометрии

К учебнику Л. С. Атанасяна и др. «Геометрия. 7–9 классы»

- *Методы решения задач*
- *Тематическое планирование*
- *Планы уроков*
- *Объяснение сложных тем*
- *Контрольные и самостоятельные работы*
- *Указания к задачам и решения*

7 класс



ЭКЗАМЕН

Учебно-методический комплект

Т. М. Мищенко

Дидактические материалы и методические рекомендации для учителя по геометрии

К учебнику Л. С. Атанасяна и др.
«Геометрия. 7–9 классы» (М. : Просвещение)

7 класс

Методы решения задач
Тематическое планирование
Планы уроков
Объяснение сложных тем
Контрольные и самостоятельные работы
Указания к задачам, решения

Издательство
«ЭКЗАМЕН»
МОСКВА • 2016

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21
М71

Мищенко Т. М.

М71 Дидактические материалы и методические рекомендации для учителя по геометрии: 7 класс: к учебнику Л. С. Атанасяна и др. «Геометрия. 7–9 классы». ФГОС (к новому учебнику) / Т. М. Мищенко. — М. : Издательство «Экзамен», 2016. — 158, [2] с. (Серия «Учебно-методический комплект»)

ISBN 978-5-377-09919-2

Данное пособие полностью соответствует федеральному государственному образовательному стандарту (второго поколения).

Предлагаемые дидактические материалы и методические рекомендации призваны помочь учителю, работающему по учебнику Л. С. Атанасяна и др. «Геометрия. 7–9 классы».

Пособие полностью соответствует требованиям, предъявляемым федеральным государственным образовательным стандартом к уровню изложения теоретического материала. Предлагаемые задания удовлетворяют требованиям планируемых результатов обучения как обязательного уровня, так и повышенного уровня сложности.

Использование рекомендаций методического пособия в учебном процессе позволит осуществить: во-первых, достижение каждым учеником уровня обязательной геометрической подготовки, и, во-вторых, сформировать у учащихся умение применять полученные знания как в стандартных ситуациях, так и в несколько отличных от обязательного уровня.

В пособии по *каждой главе* дается общая характеристика ее содержания, места и роли этой главы в курсе, методических особенностей ее изучения; контрольная работа.

По *каждому параграфу* дается комментарий для учителя, включающий общую характеристику содержания параграфа, требования к знаниям и умениям учащихся; методические рекомендации к изучению материала; примерное планирование изучения материала параграфа; указания к решению задач из учебника; дополнительные задачи.

Приказом Министерства образования и науки Российской Федерации учебные пособия издательства «Экзамен» допущены к использованию в общеобразовательных организациях.

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21

Подписано в печать 29.04.2016. Формат 60х90/16. Гарнитура «Школьная».
Бумага газетная. Уч.-изд. л. 6,77. Усл. печ. л. 10. Тираж 10 000 экз. Заказ № 4429.

ISBN 978-5-377-09919-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга предназначена учителю, работающему в седьмых классах по учебнику Л.С. Атанасяна «Геометрия, 7–9» (М., Просвещение, 2013). В книге даны рекомендации, разработанные в соответствии с концепцией построения учебника и позволяющие учителю сориентироваться как в методических особенностях изложения учебного материала, так и в требованиях, предъявляемых федеральной программой к геометрической подготовке учащихся.

Использование рекомендаций методического пособия в учебном процессе позволит осуществить: во-первых, достижение каждым учеником уровня обязательной геометрической подготовки и, во-вторых, сформировать у школьников умение применять полученные знания как в стандартных ситуациях, так и в ситуациях, несколько отличных от обязательного уровня.

Основными особенностями авторского подхода к изложению учебного материала являются: опора на наглядность, снижение уровня строгости логических рассуждений при обосновании утверждений, очевидных с точки зрения учащихся.

Такой подход определяет и главный метод работы учителя с классом: *обучение по образцам*, а именно, практически *каждая теорема курса должна быть доказана учителем у доски*. Кроме того, *целесообразно*, чтобы при ответах учащихся образец ответа давал сам учитель, предлагая неоднократно повторить его при решении аналогичных задач. Требования же при оценке ответов учащихся и их письменных работ следует повышать постепенно. Такой подход будет способствовать развитию культуры мышления.

Отсюда следует, что большую часть урочного времени необходимо использовать для решения задач. В учебнике задачам отводится чрезвычайно важная роль. Некоторые из них содержат геометрические факты и служат дополнением к теоретическому материалу учебного пособия. Другие в определенном смысле можно считать задачами уровня обязательной математической подготовки, а умение решать их — обязательным для всех учащихся. Третьи являются задачами повышенного уровня.

В систему задач учебника входит значительное число задач, которые в разделе «Методические рекомендации к изучению материала» рекомендуется решать устно. Это совершенно не означает, что эти задачи просты. Это, как правило, задачи, в ходе решения которых необходимо привлекать как можно больше учащихся для поиска решения.

Определенную сложность для учителя представляет необходимость взвешенного сочетания при решении задач письменных и устных форм работы. Письменные формы работы являются важнейшим видом деятельности, формирующим устойчивые навыки в проведении логических рассуждений при решении задач. Форма записи условия задачи, разумные, естественные и исторически сложившиеся сокращения и обозначения при вычислениях и доказательствах дисциплинируют мышление. Вместе с тем заметим, что увлечение письменными видами работы на уроках и дома приводит к большим и не всегда оправданным затратам времени и тормозит развитие устной геометрической речи.

Планирование учебного материала рассчитано на ***пять*** часов математики в неделю, при этом изучение геометрии в соответствии с программой VII класса начинается со второй четверти. Такой подход позволяет полнее использовать алгебраический инструментарий в решении геометрических задач.

Основное назначение данной книги — помочь учителю в организации учебной деятельности школьников. В ней даются:

по каждой главе — общая характеристика ее содержания, места и роли в курсе, контрольная работа;

по каждому параграфу — комментарий для учителя, включающий, если необходимо, общую характеристику содержания и требования к знаниям и умениям учащихся; методические рекомендации к изучению материала с разбивкой по отдельным вопросам; примерное планирование изучения материала параграфа; указания к решению задач из учебного пособия; дополнительные задачи.

Рубрика **«Методические рекомендации к изучению материала для учителя»**. ***Весь материал данного раздела полностью адресован учителю и только учителю.*** Здесь учитель получает некоторую оценочную рекомендацию к изучению материала, в которой расставлены акценты и указаны приоритеты. Все методические рекомендации должны быть адаптированы к конкретному классу, уровню подготовки учащихся. Такая адаптация может привести к уменьшению числа решаемых задач, увеличению числа часов, отводимых на изучение той или иной темы за счет часов, отводимых на решение задач, или резерва.

В рекомендациях к изложению теоретического материала рассматриваются возможные методические подходы к изложению материала на уроке, дается примерная система упражнений для закрепления теоретического материала и контроля за его усвоением. Для некоторых наиболее сложных теорем приводятся примерные планы проведения их доказательств. Новый материал будет лучше усваиваться учащимися, если они под руководством учителя сделают краткие записи в тетрадях. В большинстве случаев достаточно записать план доказательства или узловые моменты доказательства. Целесообразно сопроводить и доказательства теорем, и определения, и решения задач чертежами.

Учитывая наличие рабочих тетрадей к учебнику Л.С. Атанасяна и др. «Геометрия 7–9», в методических рекомендациях указываются места их применения и даются рекомендации по их использованию.[1]

Привлечение наглядных представлений не только не противоречит основному принципу построения курса, но является его методической особенностью.

Рубрика **«Примерное планирование изучения материала»**. Задачи к каждому уроку выделены по принципу их соответствия содержанию изучаемого на данном уроке теоретического

[1] Рабочая тетрадь по геометрии: 7 класс : к учебнику Л.С. Атанасяна и др./ Т.М. Мищенко. — М.: Издательство «Экзамен», 2016.

материала. Поэтому кроме задач, указанных в разделе «Методические рекомендации к изучению материала», включены задачи, которые лучше решить с классом не в процессе объяснения нового материала, а в процессе его закрепления. Одна из задач этапа первичного закрепления в процессе изучения темы состоит в том, чтобы научить школьников решать новые задачи, применяя только что полученные сведения. Как правило, именно эти задачи дублируются задачами домашнего задания.

При распределении учебного времени на изучение каждой темы последний урок отводится: на систематизацию и обобщение знаний по данной теме, один урок на контрольную работу и заключительный урок для разбора ошибок контрольной работы и подведения итогов. На уроках систематизации и обобщения знаний рекомендуется решить те задачи, которые не были решены в процессе изучения темы, и провести подготовку к контрольной работе.

В рубрике **«Указания к задачам»** приведены схемы решения основных (опорных задач) и решения наиболее трудных задач.

«Дополнительные задачи» образуют некоторый резерв для учителя. Одни из них должны помочь при закреплении нового материала, другие — подвести учащихся к решению задач из учебника, третьи могут быть использованы для индивидуальных заданий.

Целью **самостоятельных и контрольных работ** является проверка усвоения учащимися основного материала изученной темы (иногда части темы). При этом результаты проверки самостоятельных и контрольных работ позволяют зафиксировать не только достижение или недостижение учащимися уровня обязательной подготовки, но также достижение повышенного уровня обученности. В работах проверяются следующие умения: понимать условие задачи, владеть соответствующей терминологией и символикой; делать чертежи, сопровождающие условие задачи, выделять на чертеже необходимую при решении задачи конфигурацию.

Значительную помощь учителю в организации учебного процесса могут оказать рабочие тетради издательства «Экзамен»: «Геометрия — 7», «Геометрия — 8», «Геометрия — 9», (Т.М. Мищенко).

В процессе работы над книгой была использована следующая литература:

1. *Атанасян Л.С.* и др. Геометрия: Учеб. для 7–9 классов. — М.: Просвещение, 2013.

2. *Погорелов А.В.* Геометрия: Учеб. для 7–9 классов. — М.: Просвещение, 2013.

3. *Шарыгин И.Ф.* Геометрия: Учеб. для 7–9 кл. — М.: Дрофа, 2013.

4. Примерные программы основного общего образования. Стандарты второго поколения. Математика. — М.: Просвещение, 2009.

5. *Мищенко Т.М.* Геометрия. Планируемые результаты. Система заданий 7–9 классы: пособие для учителей. ФГОС / под ред. Г.С. Ковалевой, О.Б. Логиновой — М.: Просвещение, 2014.

6. *Кузнецова Л.В.* и др. Планируемые результаты. Система заданий. Математика 5–6 классы. Алгебра 7–9 классы. ФГОС / под ред. Г.С. Ковалевой, О.Б. Логиновой. — М.: Просвещение, 2013.

ГЛАВА I. НАЧАЛЬНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ (10 ч)

В этой главе закладываются основы курса планиметрии: вводятся основные понятия и свойства простейших геометрических фигур, позволяющие осуществить построение курса. Введение основных свойств геометрических фигур проводится на основе систематизации и обобщения знаний и представлений учащихся о простейших геометрических фигурах, накопленных ими в процессе изучения математики в I–VI классах и из жизненного опыта. Поэтому в методическом плане понятия, вводимые в этом параграфе, достаточно просты и в известной степени знакомы учащимся, а значит, ни подготовительной работы, ни значительной отработки не требуют. Принципиальным моментом данной темы является введение понятия равенства геометрических фигур на основе наглядного представления: *наложения.* Поэтому основное внимание в учебном материале этой темы уделяется двум аспектам: понятию равенства геометрических фигур (отрезков и углов) и свойствам измерения отрезков и углов, что находит свое отражение в системе упражнений учебника.

Изучение данной темы должно также решить задачу введения терминологии, развития наглядных представлений и навыков изображения планиметрических фигур и простейших геометрических конфигураций по условию задачи и в ходе решения задач. Все это необходимо для дальнейшего изучения курса геометрии, в силу чего важными аспектами изучения данной темы являются работа с чертежами и рисунками, использование простейших геометрических инструментов (линейка, транспортир). При решении задач следует, прежде всего, опираться на наглядные представления учащихся. Тем не менее решение задач следует использовать для постепенного формирования у учащихся первых навыков применения свойств геометрических фигур как опоры при решении задач.

Большинство упражнений главы, в которых происходит закрепление терминологии и изучение основных свойств геометрических фигур, способствует обучению учащихся грамотной устной и письменной речи, формированию у школьников умений точно формулировать мысль и проводить рассуждения.

Приведенные в разделе «Вопросы и задачи» учебника решения некоторых задач служат образцами таких рассуждений. Целесообразно, чтобы на первых порах образец ответа давал сам учитель, предлагая неоднократно повторить его при решении аналогичных задач. Каждый ответ учащегося надо завершать правильной и точной формулировкой учителя, не снижая при этом оценку за *«корявый язык»* ученика при правильном понимании сути теоретического материала и верном решении задачи.

Многие задачи этой главы в своем решении используют стандартные приемы или представляют собой стандартные задачи, которые в курсе геометрии будут использоваться как фрагменты более сложных задач и поэтому требуют внимания со стороны учителя. Поскольку решение многих задач данного параграфа видно непосредственно из рисунка, можно предложить выполнять рисунок в ходе решения задачи, сопровождая каждый шаг логическими рассуждениями.

Изучение первой главы ставит перед учителем сложные методические задачи:

1) начать обучение школьников четким геометрическим формулировкам и рассуждениям;

2) постепенно подводить учащихся к пониманию необходимости обоснования своих утверждений;

3) начать обучение умению выделять из текста геометрической задачи *«что дано»* и *«что требуется найти (доказать)»*, кратко и четко записывать решение задачи;

4) отражать ситуацию, данную в условии задачи и возникшую в ходе ее решения, на рисунке.

Всему этому учащиеся будут обучаться на протяжении всего курса геометрии, но в первой главе закладываются основы будущих умений и навыков.

Планируемые итоговые результаты изучения первой главы:

Учащиеся должны научиться:

– распознавать на чертежах и изображать на чертежах и рисунках: прямые, лучи, отрезки, параллельные, перпендикулярные и пересекающиеся прямые; углы, смежные и вертикальные углы, биссектрису угла;

– описывать устно и письменно ситуацию, изображенную на рисунке, и, наоборот, по описанию ситуации выполнять рисунок;

– выделять в конфигурации, данной в условии задачи: прямые, лучи, отрезки, параллельные, перпендикулярные и пересекающиеся прямые; углы, смежные и вертикальные углы, биссектрису угла;

– иллюстрировать и описывать взаимное расположение точек и прямых;

– иллюстрировать и объяснять свойства: *«через любые две точки можно провести прямую, и притом только одну»* и *«две прямые либо имеют только одну общую точку, либо не имеют ни одной»*;

– иллюстрировать и объяснять формулировки свойств: смежных и вертикальных углов, двух прямых, перпендикулярных третьей;

– применять при решении задач на вычисления и доказательство:

- определения лучей, отрезков, параллельных и перпендикулярных прямых; острых, прямых и тупых углов, смежных и вертикальных углов, биссектрисы угла;
- свойства измерения отрезков и углов;
- свойства: *«через любые две точки можно провести прямую, и притом только одну»* и *«две прямые либо имеют только одну общую точку, либо не имеют ни одной»*;
- свойства смежных и вертикальных углов, двух прямых, перпендикулярных третьей.

§1. Прямая и отрезок (1 ч)

Комментарий для учителя

Текущие результаты изучения первого параграфа. Учащиеся должны:

– иметь представление о том, что изучает геометрия, какие фигуры изучает планиметрия, а какие — стереометрия;

– изображать, обозначать и распознавать на чертежах и рисунках точки и прямые, расположения точек и прямых;

– формулировать и объяснять свойства: *«через любые две точки можно провести прямую, и притом только одну»* и *«две прямые либо имеют только одну общую точку, либо не имеют ни одной»*, определение отрезка;

– решать задачи на применение свойств: *«через любые две точки можно провести прямую, и притом только одну»* и *«две прямые либо имеют только одну общую точку, либо не имеют ни одной»*, определение отрезка.

Методические рекомендации к изучению материала

1°. В начале урока полезно провести вводную беседу по предлагаемому плану:

1. Зарождение геометрии.
2. От практической геометрии к науке геометрия.
3. Геометрия Евклида.
4. История развития геометрии.
5. Геометрические фигуры.

Во вводной беседе можно использовать геометрические знания учащихся, полученные ими при обучении в I–VI классах, и обращаться к их жизненному опыту. Например, попросить их привести примеры геометрических фигур, указать их в окружающих предметах и т.п. Время проведения вводной беседы около 10–12 мин.

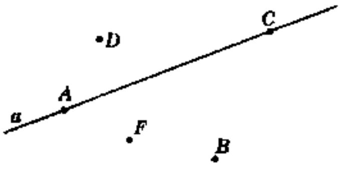


Рис. 1

2°. При изложении материала пункта 1 «Точки, прямые, отрезки», напомнив учащимся, что прямая на чертеже изображается с помощью линейки, следует обратить их внимание на то, что *всегда* можно изобразить только часть прямой.

3°. Термины *«лежит»*, *«проходит»*, *«пересекаются»* следует вводить одновременно с построением чертежа (рис. 1 и 2).

Говоря, что точка A *лежит* на прямой a, следует сначала провести прямую a, а потом нарисовать на ней точку A. Говоря, что прямая a *проходит* через точку A, следует отметить точку A, а потом провести через нее прямую a.

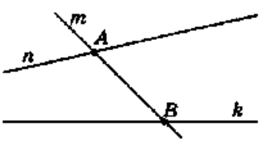


Рис. 2

Для закрепления введенной терминологии полезно выполнить с учащимися упражнение по готовому чертежу (рис. 2), предлагая вопросы:

1. На каких прямых лежит точка A?
2. Через какие точки проходит прямая AB?
3. Лежит ли точка B на прямой m?
4. В какой точке пересекаются прямые k и AB?

При использовании в процессе обучения рабочей тетради можно предложить учащимся задания 1–3, 5. При этом, естественно, первое задание должно быть разобрано учителем вместе с учащимися.

4'. После введения терминологии формулируется *свойство*: «*через любые две точки можно провести прямую, и притом только одну*». Формулируя это *свойство*, следует обратить внимание учащихся на то, что в нем содержатся два утверждения: *существование* прямой («*через любые две точки можно провести прямую*») и ее *единственность* («*и притом только одну*»).

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировку ***свойства*** *(задание 7).*

5'. Свойство: «*две прямые либо имеют только одну общую точку, либо не имеют ни одной*» вводится на основе логически обоснованного рассказа. При этом следует иметь в виду, хотя здесь и дается первое доказательное рассуждение, что не нужно на этом акцентировать внимание учащихся. Лучше предложить им несколько раз повторить рассуждение, задавая вопросы типа:

Почему две различные прямые не могут иметь две общие точки (три общие точки)?

Если бы две различные прямые имели две общие точки, то какому свойству это противоречило бы? и т.д. Ответы на эти вопросы, а следовательно, и неоднократное повторение связного рассуждения и есть первое знакомство с доказательными рассуждениями. Не нужно это доказательство делать письменным, это работа над устной речью.

Здесь можно предложить части учащихся разобрать решение задачи 11 и выполнить задание 14 из рабочей тетради.

Необходимо обратить внимание учащихся, что прямую можно обозначать двумя способами: либо строчной (малой) буквой, либо двумя заглавными буквами, обозначающими точки, лежащие на данной прямой (рис. 1).

При использовании в процессе обучения рабочей тетради можно предложить учащимся с целью обучения правильности обозначения прямой двумя способами выполнить задания 8–10.

Для краткой записи утверждения «*точка A лежит* (*не лежит*) *на прямой a*» можно использовать знак $\in$ ($\notin$), заменяющий слово «*лежит* (*не лежит*)», «$A \in a$ ($A \notin a$)».

Так как при выполнении письменных работ стандартной ошибкой учащихся является включение различных знаков ($\in$, $\perp$, $\|$, $<$ и т.д.) в словесный текст предложения, следует каждый раз при введении такого знака объяснять, где и как употребляются эти знаки.

6°. Для закрепления терминологии, связанной с определением отрезка, можно предложить учащимся выполнить упражнение **5** из учебника.

Выполнение этого упражнения сводится к изображению на доске и в тетрадях учащихся ситуации по описанию, заданному в упражнении, а также к последующему проговариванию ситуации по рисунку. При необходимости ответы учащихся уточняются и корректируются учителем.

*При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать определение отрезка, а вместо упражнения **5** из учебника можно выполнить задание **16**, а также выполнить задание **15**.*

7°. Если рабочая тетрадь не используется в процессе обучения, то по ходу изложения материала полезно выполнить с учащимися упражнения из дополнительных задач методического пособия. Упражнение **1** — на закрепление вводимой терминологии, упражнения **2** и **3** — на закрепление свойства: *«через любые две точки можно провести прямую, и притом только одну»*, упражнения **4**, **5** — на закрепление логических рассуждений, применяемых при рассмотрении свойства: *«две прямые либо имеют только одну общую точку, либо не имеют ни одной»*. Комментируя домашнее задание, нужно провести разъяснение, как в тексте учебника искать ответ на вопрос для повторения. Лучше это сделать на примере вопроса **3**. Проверку усвоения материала параграфа 1 можно провести на следующем уроке с помощью диктанта.

*При использовании в процессе обучения рабочей тетради для проверки усвоения материала второго пункта учебника проверку домашнего задания на втором уроке можно заменить выполнением заданий **4**, **6**. По усмотрению учителя части учащихся можно предложить задания **12**, **13**. Таким образом, у учащихся будет создаваться конспект урока.*

Примерное планирование изучения материала

В классе — изложить весь теоретический материал параграфа (§1), решить задачу 5; дома — вопросы 1–3 из вопросов для повторения к главе I, задания 1–4, 6, 7 из учебника.

Диктант

Диктант планируется на 10 мин. Провести его рекомендуется на следующем уроке вместо проверки домашнего задания.

1°. Проведите прямую, обозначьте ее двумя способами.

2°. Проведите прямую a, отметьте точку C, которая лежит на прямой a, точку D, которая не лежит на прямой a. Проведите прямую b, которая проходит через точку D и пересекает прямую a. Обозначьте точку пересечения прямых a и b буквой F.

3°. Проведите прямую a, отметьте две точки A и B, лежащие на прямой a. Отметьте точку C, которая лежит на отрезке AB, и точку D, которая лежит на прямой a и не лежит на отрезке AB.

4. (*Дополнительная задача*) Проведите прямую a, отметьте две точки A и B, лежащие на прямой a. Можно ли через точки A и B провести прямую b, отличную от прямой a? Объясните ответ. (Дополнительная задача включается по усмотрению учителя.)

Дополнительные задачи

1. По данным рисунка 3 ответьте на следующие вопросы:

а) Каким прямым принадлежит точка A, точка B, точка C, точка D?

б) Какие прямые проходят через точку A, точку B, точку C, точку D?

в) В какой точке пересекаются прямые a и b, b и c, c и m, b и m?

г) В какой точке пересекаются три прямые? Назовите эти прямые.

д) Назовите точки, принадлежащие прямой AC, и точки, не принадлежащие ей.

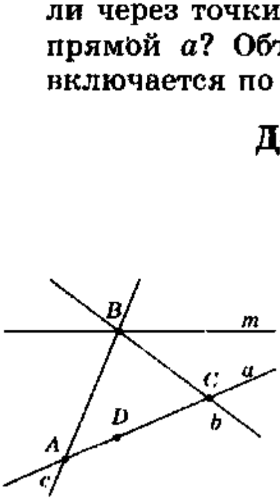


Рис. 3

2. Точка C принадлежит прямой AB. Различны ли прямые AB и AC? Объясните ответ.

Решение. Прямые AB и AC не могут быть различными, так как они обе проходят через точки A и C, а через две точки можно провести только одну прямую (*через любые две точки можно провести прямую, и притом только одну*).

3. Точки A и B принадлежат прямой l. Различны ли прямые AB и l? Объясните ответ.

Решение. Прямые AB и l не могут быть различными, так как они обе проходят через точки A и B, а через две точки можно провести только одну прямую (*через любые две точки можно провести прямую, и притом только одну*).

4. Различные прямые k и l пересекаются в точке A. Прямая k проходит через точку B. Проходит ли через точку B прямая l? Объясните ответ.

Решение. Прямая l не проходит через точку B, так как две различные прямые могут пересекаться только в одной точке (*две прямые либо имеют только одну общую точку, либо не имеют ни одной*).

5. Одна из двух пересекающихся прямых проходит через точку A, принадлежащую другой прямой. Различны ли точка A и точка пересечения данных прямых? Объясните ответ.

Решение. Эти точки совпадают, так как две прямые могут пересекаться только в одной точке (*две прямые либо имеют только одну общую точку, либо не имеют ни одной*).

§2. Луч и угол.
§3. Сравнение отрезков и углов (1 ч)

Комментарий для учителя

Текущие результаты изучения пункта 6. Учащиеся должны:

– изображать, обозначать и распознавать на чертежах и рисунках лучи, углы, равные отрезки, равные фигуры, равные углы, середины отрезков и биссектрисы углов;

– формулировать определения луча, угла, равных отрезков, равных фигур, равных углов, середины отрезка и биссектрисы угла;

– сравнивать отрезки и углы;

– объяснять, что такое внешняя и внутренняя области угла;

– решать задачи, применяя определения луча, угла, равных отрезков, равных фигур, равных углов, середины отрезка и биссектрисы угла.

Методические рекомендации к изучению материала

1. На уровне интуитивного восприятия учащимся из курса V класса известно понятие луча. Поэтому после введения понятия *луча* и связанной с ним терминологии можно провести их закрепление устно в ходе работы по готовому рисунку (рис. 4), предложив учащимся назвать:

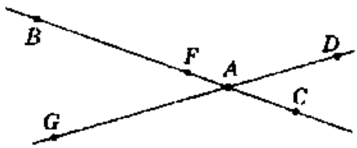


Рис. 4

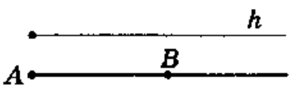


Рис. 5

а) все лучи с началом в точке A;

б) лучи с началом в точке F;

в) луч с началом в точке A и содержащий точку F;

г) луч, дополняющий луч AD до прямой;

д) совпадающие лучи.

После введения определения луча и его элементов следует обратить внимание учащихся, что луч можно обозначать двумя способами: либо строчной (малой) буквой, либо двумя заглавными буквами, первая из которых обозначает начало луча, а другая какую-либо точку, лежащую на луче (рис. 5).

2. Из дополнительных задач методического пособия акцентируем внимание учащихся на возможных способах расположения отрезка на прямой и не луче.

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует записать определение луча и его элементов. Закрепление введенной терминологии можно провести в ходе выполнения заданий ***17–20***. *Возможные способы рас*

> *положения отрезка на прямой и на луче учащиеся выяснят, выполняя задания* ***39*** *и* ***40****, которые приведены в параграфе 4 «Измерение отрезков».*

2°. После введения определения угла и его элементов следует обратить внимание учащихся на то, что угол можно обозначать тремя способами: либо указанием его вершины, либо указанием его сторон, либо указанием трех точек: вершины и двух точек на сторонах угла.

На отработку умения обозначать угол тремя способами полезно выполнить упражнение 9 из учебника. Усвоение понятия развернутого угла можно проверить выполнением упражнения 15 из учебника.

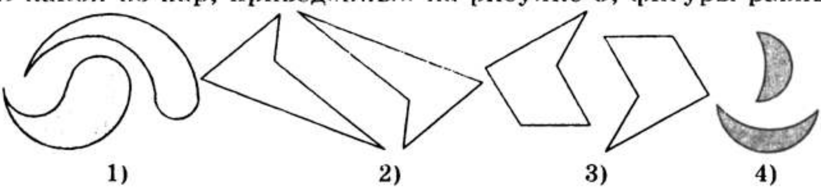
> *При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать определения угла, его элементов, развернутого угла и выполнить задания* ***21–23****. Причем задания* ***21*** *и* ***23*** *идентичны заданиям* ***9*** *и* ***15*** *из учебника.*

3°. Перед введением термина ***«луч проходит внутри угла»*** **полезно выполнить упражнение 16 из учебника на закрепление понятий** *внешняя и внутренняя области угла.* **А на его закрепление — задания 14 из учебника.**

> *При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся выполнить задание* ***24****, которое фактически совпадает с упражнением* ***16*** *из учебника. Затем записать определение термина* ***«луч проходит внутри угла»*** *и выполнить на его закрепление задания* ***25*** *и* ***26****, аналогичные заданию* ***14*** *из учебника.*

Введение понятий: *равные фигуры, равные отрезки, равные углы,* — данное в учебнике, просто и не требует комментариев. Может быть, полезно заметить, что равенство геометрических фигур *«означает их «****одинаковость****» по форме и по размеру»*. На закрепление этих понятий можно выполнить следующее упражнение:

В какой из пар, приведенных на рисунке **6**, фигуры равны?



1) 2) 3) 4)

Рис. 6

и упражнения **19** и **22** из учебника.

При использовании в процессе обучения рабочей тетради можно предложить учащимся записать определение ***равных фигур****. После чего выполнить задание* ***27****, которое является аналогом задания, предложенного выше. Затем по ходу объяснения учебного материала записать определения* середины отрезка *и* ***биссектрисы угла*** *и выполнить задания* ***28*** *и* ***29****.*

4°. Самостоятельную работу в форме теста рекомендуется провести на следующем уроке перед изучением темы «*Измерение отрезков*».

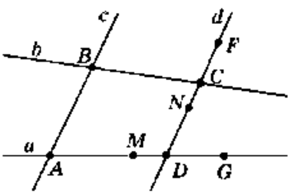
Примерное планирование изучения материала

На уроке: в классе: изложить весь теоретический материал параграфов **2** и **3**; выполнить упражнения **9**, **14–16**, **19** и **22** из учебника и задачи **1** и **2** из дополнительных задач методического пособия; дома — вопросы **4–11** из вопросов для повторения к главе I, задания **10–13**, **17**, **18**, **20** и **23** из учебника.

Самостоятельная работа по теме: «Прямая и отрезок. Луч и угол. Сравнение отрезков и углов»

Самостоятельная работа планируется на 10 мин.

1-й вариант



1. Используя данные рисунка, определите, каким отрезкам принадлежит точка M.

*Ответ:*________________________

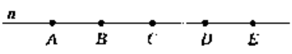
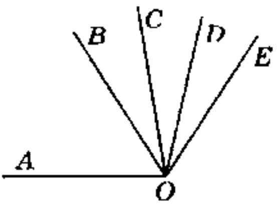


Рис. 7

2. На прямой n отмечены точки A, B, C, D и E. Известно, что $AB = BC = CD = DE$. Укажите середину отрезка AE. (рис. 7)

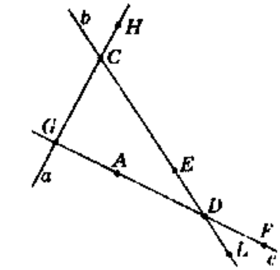
*Ответ:*________________________



3. На рисунке $\angle BOC = \angle COD = \angle DOE$, $\angle AOB = 3\angle DOE$. Укажите биссектрису угла AOE.

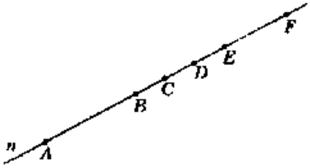
*Ответ:*________________________

2-й вариант



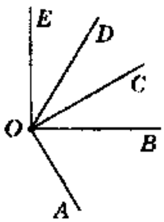
1. Используя данные рисунка, определите, между какими точками прямой b лежит точка E.

Ответ: ____________________



2. На прямой n отмечены точки A, B, C, D, E и F так, что $AB = 3BC$, $BC = CD = DE$ и $EF = 2DE$. Укажите середину отрезка AF.

Ответ: ____________________



3. На рисунке $\angle BOC = \angle COD = \angle DOE$, а $\angle AOB = 2\angle DOE$. Укажите биссектрису угла AOD.

Ответ: ____________________

Дополнительные задачи

1. Сколькими способами можно отложить отрезок RP, равный 2 см, на прямой от точки R?
2. Сколькими способами можно отложить отрезок RP, равный 2 см, на луче с началом в точке R?
3. Докажите или опровергните следующее утверждение: «Если середины отрезков AB и CD, расположенных на одной прямой, совпадают, то $AB = CD$».

§4. Измерение отрезков. §5. Измерение углов (3 ч)

Комментарий для учителя

Текущие результаты изучения параграфов 4 и 5. Учащиеся должны:

– изображать обозначать и распознавать на чертежах и рисунках острые, тупые, прямые и развернутые углы;

– объяснять термины: острые, тупые, прямые и развернутые углы;

– объяснять: что такое масштабный отрезок и как с его помощью измеряется отрезок;

– формулировать свойство измерения отрезков и свойство измерения углов;

– решать задачи на применение свойств измерения отрезков и углов.

Начиная с параграфа «Измерение отрезков», нужно постепенно проводить работу по обучению школьников доказательным рассуждениям, акцентируя внимание на обосновании решения задач, требовать от них более точных геометрических формулировок.

Методические рекомендации к изучению материала

1°. Объяснение темы *измерение отрезков* полезно провести на наглядном уровне, используя плакат типа приведенного ниже или по заранее заготовленным рисункам на доске. Возьмем отрезок AB за единицу измерения длины или, по-другому, в качестве *масштабного отрезка* и измерим им отрезок CD (рис. 8). Повторим измерения, взяв в качестве *масштабного отрезка* отрезок MN (рис. 9). Число единиц длины меняется в зависимости от выбранной единицы измерения. В первом случае длина отрезка CD равна четырем отрезкам AB ($CD = 4\ AB$), во втором длина отрезка CD равна восьми отрезкам MN ($CD = 8\ MN$). Таким образом, приходим к выводу: *«выбрав единицу измерения, можно измерить любой отрезок, т.е. выразить его длину некоторым положительным числом»*.

Рассмотрим отрезки CD и GF. Их можно совместить наложением, т.е. они равны. Теперь измерим в тех же единицах (отрезки AB и MN) отрезок GF (рис. 10). Получим, что длина отрезка GF равна четырем отрезкам AB и восьми отрезкам MN, т.е. *«равные отрезки имеют равные длины»*, что записывается как $CD = GF$.

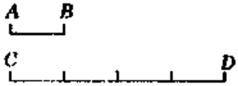


Рис. 8

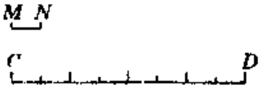


Рис. 9

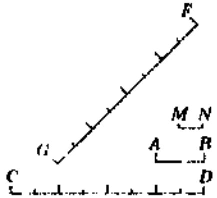


Рис. 10

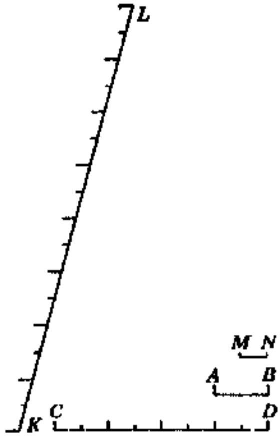


Рис. 11

Наложив отрезок CD на отрезок KL, получим, что отрезок CD меньше отрезка KL. Измерим отрезок KL, взяв за единицы измерения отрезки AB и MN (рис. 11), получим KL равен восьми отрезкам AB и шестнадцати отрезкам MN. Таким образом, получили, что *«меньший отрезок имеет меньшую длину»*. Кроме того, заметим, что при измерении отрезка KL, когда за единицу длины взят отрезок AB, отрезок KL в два раза больше отрезка CD, и в случае, когда за единицу длины взят отрезок MN, отрезок KL в два раза больше отрезка CD. Таким образом, равенство отрезков и отношение отрезков не зависят от выбранной единицы измерения длины. По рисункам **8**, **9**, **10** и **11** можно изготовить плакаты.

2°. После объяснения свойств *длины отрезка* полезно вспомнить с учащимися известные им единицы измерения длин и обсудить вопрос об измерении отрезка, когда *масштабный отрезок* не укладывается целое число раз в измеряемый отрезок. После этого полезно выполнить задания **26**, **29** из учебника.

На прямое применение свойства: *«если точка делит отрезок на два отрезка, то длина всего отрезка равна сумме длин этих двух отрезков»*, можно предложить учащимся решить задания **1** и **2** из дополнительных задач методического пособия устно, с выполнением рисунка на доске и в тетрадях.

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует записать формулировку ***свойства измерения отрезков****. Затем на прямое закрепление выполнить задания*

30–37. Причем задания 34 и 35 совпадают с заданиями 1 и 2 из дополнительных задач методического пособия.

3°. Объяснение темы *«измерение углов»* следует начать, как и в учебнике, с повторения с учащимися единиц измерения углов, известных им из курса математики.

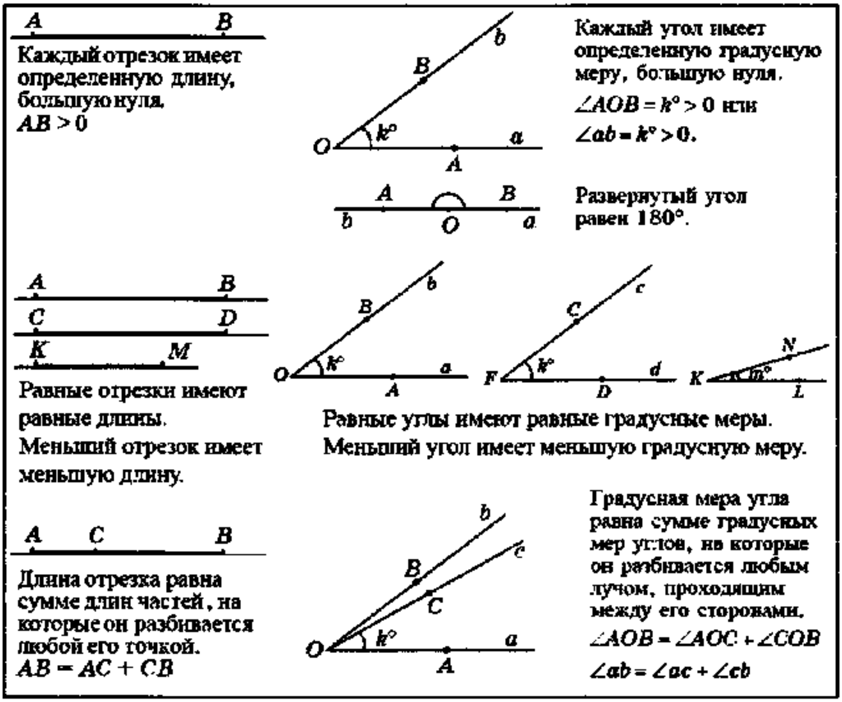


Рис. 12

Введение *свойств измерения углов* полезно проводить с одновременным повторением формулировок *свойств измерения отрезков*, сделав при этом рисунок и соответствующую запись на доске (рис. 12). Видимые из рисунков аналогии помогают более глубокому усвоению изучаемого материала. По рисунку 12 можно изготовить плакат.

Введение понятий прямого, тупого и острого углов, по сути, является простым напоминанием учебного материала, известного из курса математики, и не требует отработки.

4°. На непосредственное применение *свойств измерения углов* можно устно решить задачи 45, 46, 47 а) из учебника и задание 3 из дополнительных задач методического пособия с выполнением рисунка на доске и в тетрадях. Решение задачи 50 из учебника полезно оформить в тетради полностью.

*В рабочей тетради следует записать по мере введения формулировки **градусной меры угла** и **свойств измерения углов**. На прямое закрепление **свойств** выполнить задания **54–56**. Задачи **50** и **51** лучше выполнить сразу после введения понятия равных углов. Задача **54**, приведенная в рабочей тетради, является парной к задаче **50** из учебника, поэтому при использовании в учебном процессе рабочей тетради задачу **50** из учебника полезно задать на дом, обратив внимание учащихся, что ее решение аналогично решению задачи **54**.*

5°. При решении задач этих параграфов полезно начать обучение учащихся выполнению краткой записи условия задачи и рисунка. Особое внимание нужно уделить записи задач, когда в их формулировке условие разбито на две части: первая — до вопроса, вторая — после слова *«если»*, например, в задачах **31**, **37**, **38** из §4 учебника и **47**, **48**, **49** из §5 учебника.

*В рабочей тетради в задачах **37** и **54** приведены примеры краткой записи условия и заключения задачи, а также предложена удобная схема оформления задачи. Задача **38** является парной к задаче **37**, поэтому, разобрав запись условия и заключения задачи **37**, следует предложить учащимся самостоятельно оформить решение задачи **38**. В задаче **43** приведен пример полного оформления задачи и доказательные рассуждения, которые сопровождают запись решения задачи. Задача **41** является парной к задаче **32** из учебника. Перед их решением полезно рассмотреть задачи **39** и **40**, которые закрепляют представления учащихся о прямых и лучах. Эти задачи полезно использовать для индивидуальной работы или при подготовке к контрольной работе.*

6°. Среди относящихся к параграфам **4** и **5** учебника задач особый интерес представляют задачи **36** и **53**. Решение задачи **36**, приведенное в учебнике, рекомендуется разобрать по тексту учебника в классе, сопровождая рассуждения выполнением рисунка. Решение этой задачи представляет собой первоначальное знакомство школьников с методом рассуждения от противного. К задачам, решаемым этим методом, следует относиться очень внимательно и терпеливо отрабатывать с учащимися схему доказательных рассуждений. Закрепление этих рассуждений можно провести при решении задачи **53** из §5 учебника.

7°. Кроме того, среди задач, рекомендованных к параграфам 4 и 5 учебника, задачи **39** и **40** (§4) и задача **52** (§5) составляют серию интересных задач, решение которых позволяет учащимся глубже усвоить свойства середины отрезка и биссектрисы угла и увидеть аналогии в их свойствах. В то же время решение их поможет учителю в развитии интереса школьников к геометрии. Поэтому, если позволяет уровень геометрической подготовки класса, можно рассмотреть решение этих задач на третьем уроке в классе либо их можно использовать для индивидуальной работы.

*При использовании в процессе обучения рабочей тетради задачи **46**, **47**, **57** и **58** дополнят блок этих задач, а приведенное решение задачи **46** позволит учащимся увидеть ситуации, в которых свойства середины отрезка и биссектрисы эффективно применяются.*

8°. На первом уроке рекомендуется провести оперативную проверку знаний учащихся по теме *«Прямая и отрезок. Луч и угол. Сравнение отрезков и углов»*, а по теме *«Измерение отрезков. Измерение углов»* на третьем уроке как самостоятельные работы, используя задания с кратким ответом. Возможно, учащиеся впервые встретятся с такой формой проверки, поэтому рекомендуется объяснить им, как надо выполнять такие задания. При выполнении задания с кратким ответом учащийся должен записать верный ответ в специально отведенном для этого месте. При этом от ученика не требуется ни подробная запись решения, ни объяснение выбранного решения. Черновик, на котором ученик делает необходимые ему записи, на проверку учителю не сдается и при оценке не может влиять на выставляемую оценку. Задание считается выполненным верно, если ученик записал верный ответ.

Примерное планирование изучения материала

На уроке: в классе — провести в качестве проверки домашнего задания самостоятельную работу; изложить весь теоретический материал параграфа 4; выполнить задания 26, 29 из учебника и задания 1 и 2 из дополнительных задач методического пособия; дома — вопросы 12–13 из вопросов для повторения к главе I, задачи **27, 28, 30, 31 (б), 33, 38.**

На втором уроке: в классе — изложить весь теоретический материал параграфа 5; устно решить задачи 45, 46, 47 а); оформить решение задачи 50; дома — вопросы 14–16 из вопросов для повторения к главе I, задачи 42, 47 б), 48, 49.

На третьем уроке: в классе — по тексту учебника разобрать решение задачи 36 из §4 учебника; решить задачу 53 из §5 учебника; решить задачи 34 и 51; провести самостоятельную работу; дома — прочитать пункты 8 и 10, задачи 32, 37.

Самостоятельная работа по теме: «Измерение отрезков. Измерение углов»

Самостоятельная работа планируется на 20 мин.

1-й вариант

1. На прямой последовательно отмечены точки A, B, C и D. Запишите отрезок AD в виде суммы любых двух отрезков. Сделайте рисунок.

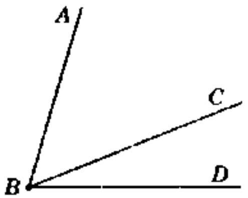
Ответ: ______________________

2. Луч k — биссектриса угла gh. Луч t — биссектриса угла kh. Найдите градусную меру угла gh, если градусная мера угла kh равна 17°. Сделайте рисунок.

Ответ: ______________________

3. Отрезок, равный 45 см, разделен на три неравных отрезка. Расстояние между серединами крайних отрезков равно 28 см. Найдите длину среднего отрезка. Сделайте рисунок.

*Ответ:*________________________



4. Луч BC проходит внутри угла ABD. Найдите угол ABD, если $\angle CBD = 14°$, а угол ABC в три раз больше угла CBD.

*Ответ:*________________________

2-й вариант

1. На прямой последовательно отмечены точки A, B, C и D. Запишите отрезок BC в виде разности двух отрезков. Сделайте рисунок.

*Ответ:*________________________

2. Лучи k и t проходят между сторонами угла gh. Угол, образованный биссектрисами углов gk и th, равен 47°. Найдите градусную меру угла kt, если градусная мера угла gh равна 70°.

*Ответ:*________________________

3. Точка D — середина отрезка AB, точка K — середина отрезка BD. Найдите длину отрезка AB, если $KD = 5$ см. Сделайте рисунок.

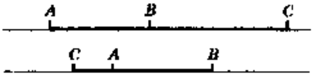
*Ответ:*________________________

4. Точка M лежит на отрезке AB, длина которого 6 см. Найдите длину отрезка MB, если $AM = 2MB$.

*Ответ:*________________________

Указания к решению задач

Задачи 32 и 33 аналогичны как по содержанию, так и по методу решения. Однако в формулировках задач одна и та же ситуация описана в различных терминах. Рассмотрим решение задачи **32**.



25,5 см и 1,5 см.

Рис. 13

Решение. Точку C мы можем расположить двумя способами (рис. **13**).

39. Решение. На отрезке DG, длина которого равна a, отмечена точка B (рис. **14**). Пусть O — середина DB; O_1 — середина BG. $B \in DG$, значит, по свойству измерения отрезков:

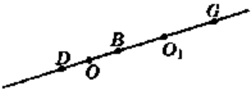


Рис. 14

$DG = DB + BG$; $O \in DB$, значит, по свойству измерения отрезков: $DB = DO + OB$; $O_1 \in BG$, значит, по свойству измерения отрезков: $BG = BO_1 + O_1G$. Отсюда: $DG = DO + OB + BO_1 + O_1G$.

По условию: $DO = OB$ и $BO_1 = O_1G$; тогда $DG = OB + OB + BO_1 + BO_1$; $DG = 2(OB + BO_1) = 2OO_1 = a$; $OO_1 = \frac{1}{2}a$.

40. Решение. Отрезок AB, равный 28 см, разделен на три неравных отрезка AC, CD и DB (рис. **15**). Пусть O — середина AC; O_1 — середина DB, причем $OO_1 = 17$ см. По условию:

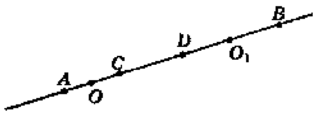


Рис. 15

$C \in AB$; $D \in AB$, значит, по свойству измерения отрезков: $AB = AC + CD + DB$. Так как $O \in AC$ и $O_1 \in DB$, значит, по свойству измерения отрезков: $AB = AO + OO_1 + O_1B$.

По условию $AB = 28$ см и $OO_1 = 17$ см, отсюда $AO + BO_1 = AB - OO_1 = 28$ см $-$ 17 см $=$ 11 см. По условию $AO = OC$ и $DO_1 = O_1B$; тогда $AO + BO_1 = DO_1 + CO = 11$ см. По условию: $C \in OO_1$; $D \in OO_1$, значит, по свойству измерения отрезков: $OO_1 = OC + CD + + DO_1$. Отсюда: $CD = OO_1 - (OC + DO_1) = 6$ см.

50. Из рисунка **16** хорошо видно решение задачи.

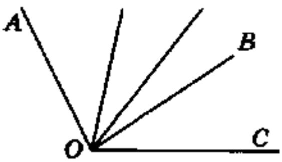


Рис. 16

52. Решение. Угол XOZ разделен лучом OY на два неравных угла XOY и YOZ (рис. **17**). Пусть OU — биссектриса $\angle XOY$ и OV — биссектриса $\angle YOZ$. Как в задаче 39 доказывается, что расстояние между сере-

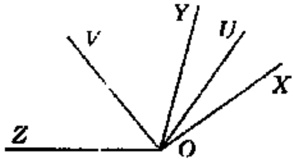


Рис. 17

динами отрезков DB и BG равно половине длины отрезка DG, так же, применяя свойство измерения углов, можно доказать, что градусная мера угла VOU, образованного биссектрисами углов XOY и YOZ, равна половине градусной меры угла XOZ.

53. Решение. Прямой угол равен 90°. Если угол hl — прямой, то по доказанному в задаче 52 угол hl равен половине угла hk. Однако угол hk меньше 180°. Тем более угол hl не может быть тупым.

Дополнительные задачи

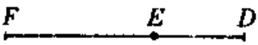


Рис. 18

Рис. 19

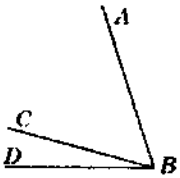


Рис. 20

1. На рисунке 18: $FE = 8$ см, $ED = 5$ см. Найдите длину отрезка FD.
2. На рисунке 19: $SR = 8$ см, $TR = 5$ см. Найдите длину отрезка ST.
3. На рисунке 20: $\angle ABD = 63°$, а $\angle CBD = 15°$. Найдите величину угла ABC.
4. Луч c делит угол (ab), равный 85°. Найдите углы (ac) и (cb), если угол (cb) в четыре раза больше угла (ac).
5. Точки A, B, C и D лежат на одной прямой. Найдите длину отрезка AD, если $AB = 1{,}2$ см; $BC = 1{,}4$ см; $CD = 1{,}7$ см.

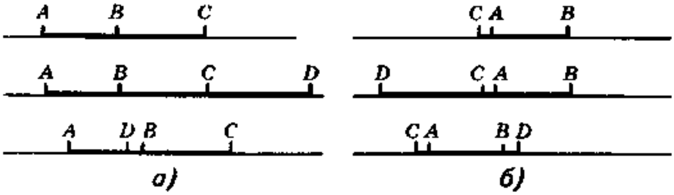


Рис. 21.

Решение. Возьмем две точки A и B. Тогда для C возможны два положения: вправо и влево от точки B (рис. 21 а) и б))

Для каждого положения C возможны два положения точки D. Ситуация задачи отражена на рисунке 21. Возможны значения AD: 4,3 см; 0,9 см; 1,9 см; 1,5 см.

§6. Перпендикулярные прямые (2 ч)

Комментарий для учителя

Текущие результаты изучения параграфа 6. Учащиеся должны:

– изображать, обозначать и распознавать на чертежах и рисунках смежные и вертикальные углы, перпендикулярные прямые;

– формулировать и объяснять определения смежных и вертикальных углов, перпендикулярных прямых;

– формулировать и доказывать утверждения: о сумме смежных углов, о равенстве вертикальных углов; и о двух прямых, перпендикулярных третьей;

– решать задачи с применением свойств смежных, вертикальных углов и перпендикулярных прямых.

Методические рекомендации к изучению материала

1°. Понятие *смежные углы* полезно ввести на наглядном уровне. Проведем прямую CK и отметим точку F, лежащую между точками C и K (рис. 22).

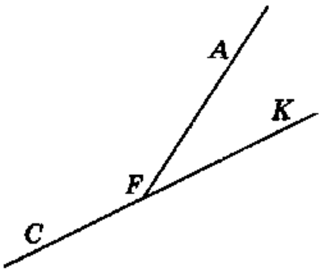


Рис. 22

Проведем луч FA. Получим два угла: $\angle CFA$ и $\angle AFK$. Такие углы называют *смежными углами*. Здесь следует обратить внимание учащихся на два важных момента: первое — наличие у углов общей стороны FA и второе — поскольку по построению стороны FC и FK принадлежат одной прямой, то они являются продолжениями одна другой. После этого сформулировать определение смежных углов.

Для проверки правильности усвоения учащимися понятия *смежные углы* и умения находить их в стандартных ситуациях надо выполнить работу по готовым чертежам, (например, как на рисунке 23, включив в их набор контрпример е):

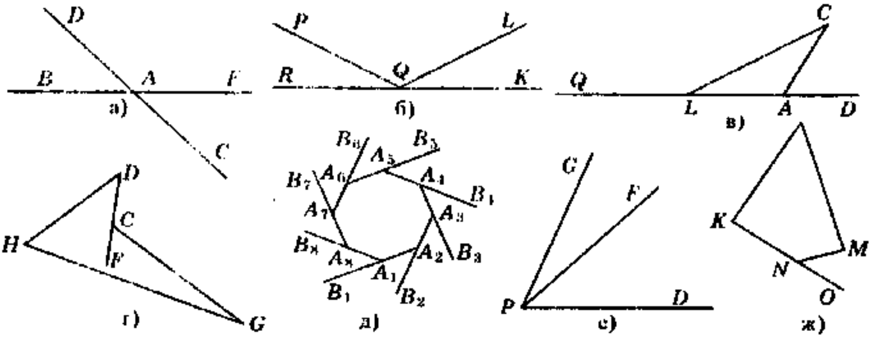


Рис. 23

1. На рисунках найдите пары смежных углов.
2. Объясните, почему эти углы являются смежными.
3. Определите, являются ли углы на рисунке **23 е)** смежными и почему.

Вместе с данным в учебнике вербальным определением *смежных углов* полезно дать также их конструктивное определение, т.е. показать учащимся, что смежный угол можно построить путем дополнения одного из лучей, являющихся стороной угла, до прямой. Для этого можно использовать следующее упражнение:

Дан угол *CGD*. Начертите угол, смежный с углом *CGD*. Сколько таких углов можно построить?

*При использовании в учебном процессе рабочей тетради после записи определения **смежных углов** выполнить упражнения **63** и **64**.*

2. Доказательство традиционной для любого курса геометрии теоремы *о сумме смежных углов*, как правило, не вызывает затруднений у учащихся.

Его объяснение можно провести с опорой на рисунок **40** из учебника (**§6** глава **I**). Углы $\angle AOB$ и $\angle BOC$ смежные. В сумме они образуют развернутый угол, значит, $\angle AOB + \angle BOC = 180°$.

В качестве упражнений на закрепление теоремы можно предложить учащимся устно решить задачу **58** из учебника.

3. После доказательства свойства *смежных углов* полезно решить задачи **60** и **63** из учебника. Утверждения этих задач:

Если два угла равны, то смежные с ними углы равны.

Угол, смежный с прямым углом, прямой

очень часто будут использоваться в дальнейшем курсе геометрии. Во многих курсах геометрии они рассматриваются авторами как следствия из теоремы *о сумме смежных углов*, поэтому их следует решить на уроке и, если учитель сочтет нужным, можно записать решение в тетрадях.

В качестве упражнений на закрепление свойства *смежных углов* можно предложить учащимся устно решить задачи **1–3** из дополнительных задач, которые связывают понятия смежных углов и определения прямого, тупого и острого углов.

В рабочей тетради разобрать доказательство задачи 65, решить задачу 66. Задачи из учебника, рекомендованные для решения в классе, можно заменить аналогичными задачами из рабочей тетради.

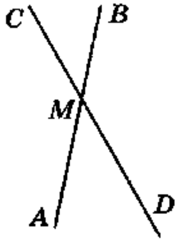


Рис. 24

4′. Ввести понятие *вертикальные углы* можно конструктивно. Нарисуем угол AMD (рис. **24**). Дополним стороны MA и MD до прямых. Углы AMD и CMB называются *вертикальными углами*. При этом следует обратить внимание учащихся на то важное обстоятельство, что стороны MA и MD угла AMD являются продолжениями сторон MB и MC угла CMB.

После этого сформулировать определение *вертикальных углов*. Для проверки правильности усвоения учащимися понятия *вертикальные углы* и умения находить их в стандартных ситуациях можно предложить задания по готовым чертежам, например, как на рисунке **25**, включив в их набор контрпример **б)**:

1. На рисунке найдите пары вертикальных углов.
2. Объясните, почему эти углы являются вертикальными.
3. Определите, являются ли углы на рисунке **25 б)** вертикальными и почему.

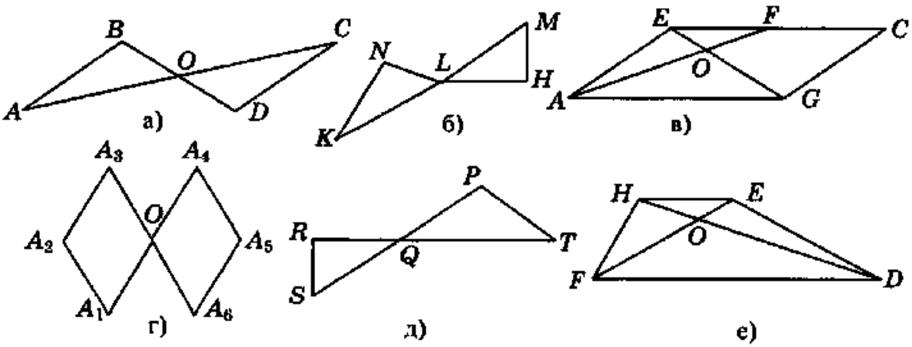


Рис. 25

Кроме того, полезно предложить учащимся ответить на следующие вопросы:

1. Сколько пар вертикальных углов образуется при пересечении двух прямых?

2. Какие еще углы образуются при пересечении двух прямых?

Ответ на этот вопрос *«любые два угла, которые получаются при пересечении двух прямых, либо смежные, либо вертикальные»* довольно часто используется при решении задач как один из ее логических шагов.

> *При использовании в учебном процессе рабочей тетради после записи определения* ***вертикальных углов*** *выполнить упражнения* ***72–74****.*

5°. При доказательстве свойства *вертикальных углов* следует обратить внимание учащихся на то, что мы пользуемся тем, что рассматриваем один из углов, а именно $\angle 2$ как смежный с каждым из вертикальных углов.

На непосредственное применение свойства *вертикальных углов* решить с учащимися задачу **66** из учебника устно с использованием чертежа, выполненного при доказательстве свойства *вертикальных углов*, и кратной записью на доске или задачи **6** и **7** из дополнительных задач методического пособия.

> *В рабочей тетради прочитать формулировку свойства* ***вертикальных углов****, выполнить упражнения* ***76****,* ***77****. Можно предложить учащимся разобрать решение задачи* ***78*** *из рабочей тетради. Ее решение поможет при решении задач* ***65–68*** *из учебника, которые можно предложить для самостоятельной работы дома.*

6°. Проверку домашней работы на втором уроке удобно организовать в виде самостоятельной работы не более чем на десять минут.

7°. Перед введением определения *перпендикулярных прямых* можно предложить учащимся решить устно по готовому чертежу задачу:

Прямые AB и CD пересекаются в точке O (рис. **26**). Угол COB прямой. Найдите остальные углы. Сделайте вывод.

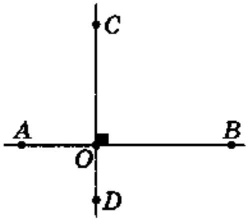


Рис. 26

Решение. Углы AOD и COB вертикальные; следовательно, они равны; значит, $\angle AOD$ — прямой. Углы COA и BOD смежные с углом COB, а угол, смежный с прямым углом, тоже прямой. Значит, углы COA и BOD прямые.

Вывод: *если в пересечении двух прямых один из углов прямой, то остальные три угла тоже прямые.*

При использовании в процессе обучения рабочей тетради можно предложить учащимся выполнить задание ***79****. А затем записать определение перпендикулярных прямых и формулировку утверждения о двух прямых, перпендикулярных к третьей.*

8°. Доказательство утверждения *о двух прямых, перпендикулярных к третьей*, достаточно трудно для восприятия учащихся, поэтому лучше провести его полностью самому учителю. Включение учащихся во фронтальную работу при разборе утверждения может привести не только к значительным потерям времени, но и к тому, что от школьников ускользнет основная идея доказательства, логическая последовательность рассуждений.

В основе доказательства лежит идея построения, т.е. доказательство — конструктивно. Поэтому представляется полезным проводить его одновременно с построением чертежа. Можно рекомендовать сделать рисунок **43 б)** из учебника на кальке или ином прозрачном материале и в процессе доказательства утверждения продемонстрировать на нем совмещение лучей PA с PA_1 и QB с QB_1.

Особенностью доказательства утверждения является то, что неявно используется понятие *«осевой симметрии»* и *«метод от противного»*. Неявное использование понятия *осевой симметрии* опирается на понятие равенства углов как углов, совмещаемых наложением. Первое знакомство школьников с *методом* рассуждения *от противного* произошло при решении задачи **36** в теме *«Измерение отрезков»*, теперь он используется при доказательстве утверждения. Однако говорить о значении этого метода рассуждений на уроке более чем преждевременно. Пока неуместным представляется даже сам термин *«метод от противного»*. Умеренная фиксация внимания на этом методе произойдет только в третьей главе. А пока же представляется единственно возможной в этом отношении задача — научить школьников первоначальным навыкам рассуждений от противного на примерах задач. Требовать доказательство утверждения от всех учащихся нецелесообразно.

На непосредственное применение *«метода от противного»* можно решить с учащимися задачу 10 или 12 с записью в тетради и устно задачи 11, 13 и 14 из дополнительных задач методического пособия.

> *В рабочей тетради предложить учащимся разобрать решение задачи 80, после чего, рассмотрев по выше предложенной схеме сущность метода* ***доказательства от противного****, выполнить упражнения 81 и 82.*

Примерное планирование изучения материала

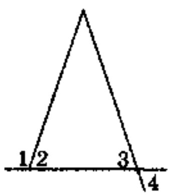
На первом уроке: в классе — изложить весь теоретический материал пункта **11**; решить задачи **58**, **59**, **60**, **63** и **66** (устно), задачи **1–3**, **6**, **7** из дополнительных задач методического пособия; дома — вопросы 17, 18 из вопросов для повторения к главе I, задачи **61** (б, г, д), **62**, **65** и **68**.

На втором уроке: в классе — провести самостоятельную работу; изложить весь теоретический материал пункта 12, устно решить задачи **11**, **13** и **14** из дополнительных задач методического пособия, оформить решение задачи **12** из дополнительных задач; дома — вопросы **19–21** из вопросов для повторения к главе I, задачи **64**, **67**, **69** и **70**.

Самостоятельная работа по теме: «Смежные и вертикальные углы»

Самостоятельная работа планируется на 15 мин.

1-й вариант



1. На рисунке: $\angle 1 = 163°$; $\angle 2 = \angle 3$. Найдите $\angle 4$.

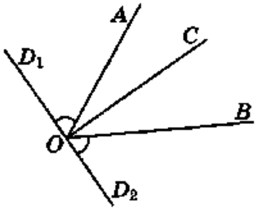
Ответ: ____________________

2. Сумма двух углов из четырех, полученных при пересечении двух прямых, равна 80°. Найдите один из двух других углов.

Ответ: ____________________

3. Определите, какой угол образуют биссектрисы смежных углов.

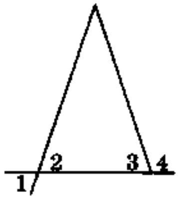
Ответ: 1. острый; 2. прямой; 3. тупой; 4. развернутый.



4. Через вершину угла AOB проведена прямая D_1D_2 так, что $\angle AOD_1 = \angle BOD_2 = 70°$. Найдите угол между прямой D_1D_2 и прямой, содержащей биссектрису OC данного угла.

*Ответ:*____________________

2-й вариант



1. На рисунке: $\angle 2 = 73°$; $\angle 1 = \angle 3$. Найдите $\angle 4$.

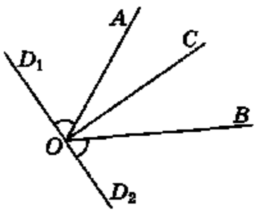
*Ответ:*____________________

2. Один из смежных углов в пять раз больше другого. Найдите эти углы.

*Ответ:*____________________

3. Определите, какой угол образуют биссектрисы вертикальных углов.

Ответ: 1. острый; 2. прямой; 3. тупой; 4. развернутый.



4. Через вершину угла AOB, равного $50°$, проведена прямая D_1D_2, перпендикулярная биссектрисе OC этого угла. Найдите угол D_1OA.

*Ответ:*____________________

Указания к задачам

60. Доказательство. Обозначим величину каждого из равных углов через α. Значит, сумма смежных углов будет равна, с одной стороны, 2α, с другой, по свойству *смежных углов*, — $180°$, тогда каждый из равных смежных углов равен $90°$.

63. Доказательство. Обозначим величину каждого из равных углов через α. Так как сумма смежных углов равна $180°$, то величины углов, смежных с равными углами α, равны $180° - \alpha$ всегда.

Задачи 61, 64–66 и 68 решаются алгебраическим способом. Приведем в качестве образца оформление решения задачи 61 (г), (рис. 27).

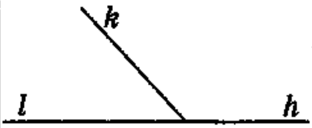


Рис. 27

Дано: $\angle lk$ *и* $\angle kh$ *смежные,*
$\angle hk$ *больше* $\angle lk$ *на* $47°18'$.

Найти: $\angle lk$ *и* $\angle kh$.

Решение.

1) Пусть $\angle lk = x$, тогда
$\angle kh = x + 47°18'$.

По свойству смежных углов $\angle lk + \angle kh = 180°$.

2) $x + x + 47°18' = 180°$; $2x = 180° - 47°18'$; $x = 66°21'$.

3) $\angle lk = 66°21'$; $\angle kh = 66°21' + 47°18' = 113°39'$.

Ответ: $\angle lk = 66°21'$; $\angle kh = 113°39'$.

Задачи 69 и 70 фактически являются задачами на прямое применение утверждения *о двух прямых, перпендикулярных к третьей.*

В задаче 69 прямые AP и AQ являются сторонами угла и, значит, пересекаются в его вершине — точке A, что противоречит утверждению, что *«две прямые, перпендикулярные к третьей прямой, не пересекаются»*.

В задаче 70 три прямые пересекаются в общей точке A. Значит, если одна из них перпендикулярна к прямой a, то две другие в силу утверждения *«две прямые, перпендикулярные к третьей прямой, не пересекаются»* не перпендикулярны.

Дополнительные задачи

1. **Докажите, что если угол — неразвернутый, то его градусная мера меньше 180°.**

Доказательство. Обозначим величину данного угла через α. Построим угол, смежный с углом α, и обозначим его через β. Так как сумма смежных углов равна 180°, то $\alpha = 180° - \beta$. Отсюда следует, что $\alpha < 180°$.

2. **Могут ли быть смежными прямой и острый углы?**

3. **Могут ли быть смежными прямой и тупой углы?**

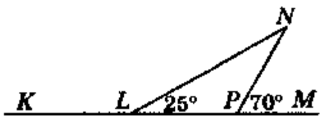


Рис.28

4. **По данным рисунка 28 определите градусную меру углов KLN и LPN.**

5. **Углы DAB и DAF — смежные. Угол DAB равен 57°. Чему равен $\angle DAF$?**

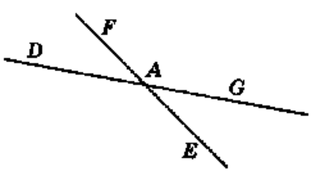


Рис. 29

6. **По данным рисунка 29 определите градусную меру угла GAE, если угол DAF равен 27°.**

7. **Один из углов, получившихся при пересечении двух прямых, равен 20°. Найдите остальные углы.**

8. **Отметьте три точки, не лежащие на одной прямой. Проведите через каждые две из них прямую. Укажите пары получившихся вертикальных углов.**

9. **Три пересекающиеся в одной точке прямые образуют шесть углов. Два из них равны 30° и 34°. Чему равны остальные углы?**

10. **Сумма двух углов равна 148°. Докажите, что эти углы не могут быть смежными.**

Доказательство. 1) Предположим, что углы $\angle\alpha$ и $\angle\beta$ — смежные. 2) По свойству смежных углов $\angle\alpha + \angle\beta = 180°$, а по условию задачи $\angle\alpha + \angle\beta = 148°$. 3) Приходим к противоречию. Значит, $\angle\alpha$ и $\angle\beta$ не являются смежными углами.

11. Сумма двух углов равна 64°. Докажите, что эти углы не могут быть смежными.

12. Разность двух углов равна 78°. Докажите, что эти углы не могут быть вертикальными.

13. Сумма трех углов, получившихся при пересечении двух прямых, равна 300°. Найдите эти углы.

14. Один из углов, получившихся при пересечении двух прямых, в 19 раз больше смежного с ним. Найдите получившиеся углы.

15. Из вершины развернутого угла (a_1a) проведены в одну полуплоскость лучи b и c. Чему равен угол (bc), если: а) $\angle ab = 100°$, $\angle ac = 20°$; б) $\angle ab = 40°$, $\angle ac = 135°$?

Систематизация и обобщение знаний по теме «Начальные геометрические сведения»

Комментарий для учителя

1°. В результате систематизации и обобщения знаний по теме «Начальные геометрические сведения» учащиеся должны:

- распознавать и изображать на чертежах прямые, лучи, отрезки и углы, смежные и вертикальные углы;
- выделять из данной конфигурации заданные в условии задания фигуры и их элементы;
- применять при решении задач свойства измерения отрезков и углов, определения смежных и вертикальных углов и свойства смежных и вертикальных углов;
- вычислять длины отрезков, градусную меру углов;
- вычислять градусную меру смежных и вертикальных углов.

2°. При подготовке к контрольной работе рекомендуется разобрать в классе решение задач 71, 77, 78, 81, 83 и 84. В зависимости от уровня подготовки класса домашнее задание можно подобрать из раздела «Дополнительные задачи».

Возможен второй вариант. Издательство «Просвещение» издает «Геометрия. Тесты 7 класс» к учебнику Л.С. Атанасяна и др. авторов: Т.М. Мищенко и А.Д. Блинков. Каждый из предлагаемых тестов рассчитан на 25 минут.

Представляется полезным предложить учащимся выполнить тесты 2 и 3, рекомендованные для первой главы «Начальные геометрические сведения» и направленные на оперативную проверку основных умений, формируемых при изучении этой темы. Сразу после выполнения теста следует разобрать решения его заданий с активным привлечением учащихся. При этом рекомендуется обратить внимание на задания 4 и 6 теста 2.

Среди ответов, приведенных к заданию 4 теста 3, предлагается такая форма «3. такая ситуация невозможна». Поэтому здесь уместно объяснить учащимся, что значит ответ «такая ситуация невозможна».

Задание 9 теста 2 по своей форме не является новым для учащихся, поскольку в курсе «Математики» они неоднократно отвечали на вопрос: «Сколько решений имеет задача?» Задачи такого типа будут повторяться во многих тестах.

Контрольная работа (1 ч)

1-й вариант

1°. Точка C лежит на прямой AB и разделяет точки A и B. Длина отрезка AC в три раза меньше длины отрезка AB. Найдите длину отрезка AC, если отрезок CB равен 8 см.

2°. Луч c проходит между сторонами угла ab, равного 40°. Найдите угол ac, если угол bc на 22° больше угла ac.

3°. Разность двух углов, получившихся при пересечении двух прямых, равна 178°. Вычислите все углы, получившиеся при пересечении двух прямых.

4. На отрезке AC, длина которого равна 18 см, отмечена точка B. Найдите расстояние между серединами отрезков AB и BC.

5. Лучи k и t проходят между сторонами угла gh, градусная мера которого равна 70°. Угол, образованный биссектрисами углов gk и th, равен 47°. Найдите градусную меру угла kt.

2-й вариант

1°. На прямой AB точки C и B лежат по одну сторону от точки A. Длина отрезка AB на 14 см меньше длины отрезка AC. Найдите длину отрезка AC, если отрезок AB равен 9 см.

2°. Между сторонами угла ab, равного 85°, проходит луч c. Найдите углы ac и cb, если угол cb в четыре раза больше угла ac.

3°. Сумма двух углов, получившихся при пересечении двух прямых, равна 178°. Вычислите все углы, получившиеся при пересечении двух прямых.

4. Отрезок, равный 35 см, разделен на три неравных отрезка. Расстояние между серединами крайних отрезков равно 18 см. Найдите длину среднего отрезка.

5. Луч k проходит между сторонами угла gh, градусная мера которого равна 2α. Найдите градусную меру угла, образованного биссектрисами углов gk и kh.

ГЛАВА II. ТРЕУГОЛЬНИКИ (15 ч)

Признаки равенства треугольников вместе с материалом главы «Параллельные прямые» и теоремой «Сумма углов треугольника» занимают центральное место не только в курсе VII класса, но во всем курсе геометрии. При изучении темы формируется умение доказывать равенство треугольников с опорой на признаки равенства треугольников.

Использование *признаков равенства треугольников* является одним из главнейших методов доказательства теорем и решения задач во всем курсе геометрии. Поэтому они должны усваиваться учащимися в процессе решения задач. При этом закрепляются формулировки теорем и формируются умения доказывать равенство треугольников, т.е. выделять по три соответственно равных элемента данных треугольников и делать ссылки на изученные признаки.

Треугольник является одной из основных фигур планиметрии. Изучением свойств и признаков равнобедренных треугольников начинается изучение свойств треугольников различных видов. Кроме того, использование свойств равнобедренных и равносторонних треугольников позволяет расширить класс задач для отработки признаков равенства треугольников. Причем задачи становятся более сложными и интересными. Поиск равных элементов двух треугольников может проводиться с опорой на свойства и признаки равнобедренных треугольников и определения высоты, медианы и биссектрисы треугольника. Таким образом, учащиеся приобретают такое важное умение, как умение анализировать условие задачи, т.е. определять, что требуется для доказательства того или иного утверждения, и ссылаться на необходимую теорему или определение.

В процессе изучения темы можно не требовать от всех учащихся воспроизведения доказательств признаков равенства треугольников. Полезно уделить внимание обучению применять признаки равенства треугольников при решении задач.

С понятием окружности и ее элементов: радиус, хорда, диаметр, касательная — учащиеся уже встречались в курсе математики. Поэтому основное внимание учителю следует уделить отработке определения окружности и равенства радиусов одной окружности. Учащиеся должны свободно владеть этими понятиями, так как они активно используются при решении задач.

Кроме того, в главе рассматриваются задачи на построение. Когда говорят о задачах на построение, то если не оговорено специально, это значит, построение выполняется с помощью циркуля и линейки. С помощью линейки проводят прямую линию через две точки. Математическая линейка односторонняя и не имеет делений, поэтому, если отрезок задан линейным размером, необходимо его изобразить с помощью обычной линейки. Затем при откладывании отрезка его длину фиксировать с помощью циркуля. С помощью циркуля строят окружность с заданным центром и радиусом, при этом радиус может задаваться отрезком или двумя точками, расстояние между которыми равно длине радиуса. Если угол задан градусной мерой, то его следует построить с помощью транспортира, а при построении искомой фигуры использовать алгоритм построения угла, равного данному.

В главе рассматриваются четыре из пяти основных задач на построение с помощью циркуля и линейки: построение угла, равного данному; биссектрисы угла; прямой, перпендикулярной данной; деление отрезка пополам. Задачи на построение направлены на развитие пространственных представлений и конструктивного подхода к решению геометрических задач.

Планируемые итоговые результаты изучения главы II:

Учащиеся должны научиться:

– распознавать на чертежах и изображать на чертежах и рисунках: равнобедренные треугольники, равносторонние треугольники; высоту, медиану и биссектрису треугольника; окружность и ее элементы;

– иллюстрировать и объяснять термины: «равные треугольники», «соответствующие стороны», «соответствующие углы», «построение с помощью циркуля и линейки»;

– описывать ситуацию, изображенную на рисунке, и, наоборот, по описанию ситуации выполнять рисунок;

– выделять в конфигурации, данной в условии задачи: равные треугольники, равнобедренные и равносторонние треугольники, высоты, медианы и биссектрисы треугольников;

– иллюстрировать и объяснять формулировки: признаков равенства треугольников, свойств равнобедренных и равносторонних треугольников, признака равнобедренного треугольника;

– иллюстрировать и объяснять основные алгоритмы построения с помощью циркуля и линейки: построение угла, равного данному; биссектрисы угла; прямой, перпендикулярной данной; деление отрезка пополам;

– применять при решении задач на вычисления и доказательство:

- определения равнобедренного и равностороннего треугольников; высоты, медианы и биссектрисы треугольника, окружности и ее элементов;
- признаки равенства треугольников, теоремы о свойствах равнобедренного треугольника;

– применять при решении задач на построение основные алгоритмы построения с помощью циркуля и линейки.

§1. Первый признак равенства треугольников (2 ч)

Комментарий для учителя

Заметим, что в методических рекомендациях изложение доказательства первого признака равенства треугольников приводится более подробно по сравнению с учебником. Это сделано для того, чтобы привлечь внимание учащихся к более детальному обоснованию доказательства. Однако при ответах учащихся не следует в обязательном порядке требовать более детальных обоснований по сравнению с учебником.

Текущие результаты изучения параграфа 1.

Учащиеся должны:

– формулировать и иллюстрировать определения треугольника и его элементов;

– изображать на чертежах и рисунках треугольники, равные по первому признаку равенства треугольников, используя обозначения равных элементов;

– распознавать на чертежах и рисунках треугольники, равные по первому признаку равенства треугольников, используя обозначения равных элементов или известные свойства фигур;

– формулировать и объяснять формулировку первого признака равенства треугольников;

– доказывать (требование только для сильных учащихся) первый признак равенства треугольников;

– решать задачи с использованием первого признака равенства треугольников.

К моменту изучения данной темы учащимися накоплен некоторый объем знаний о свойствах геометрических фигур, что позволяет им проводить простейшие доказательные рассуждения в ходе решения задач. С другой стороны, у них еще нет достаточного опыта поиска решения задачи, поэтому необходимо обращать их внимание на наличие таких условий в формулировке задачи, которые позволяют применять то или иное свойство или ту или иную теорему.

Методические рекомендации к изучению материала

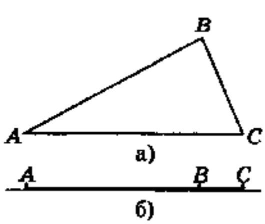


Рис. 30

1°. В определении *треугольника* следует обратить внимание учащихся на то, что три точки, являющиеся вершинами треугольника, не лежат на одной прямой, продемонстрировав два рисунка (рис. 30, а, б). На первом из рисунков точки A, B и C не лежат на одной прямой, а на втором три точки A, B и C лежат на одной прямой и треугольника не существует.

Поскольку в учебнике здесь впервые используется понятие периметра треугольника, необходимо напомнить учащимся, что «периметр треугольника равен сумме длин всех его сторон, т.е. $P_{ABC} = AB + BC + AC$».

2°. При объяснении понятия *равенства треугольников* и в доказательстве *первого признака равенства треугольников* используются ссылки на определения *равенства отрезков* и *равенства углов*. Поэтому перед началом объяснения понятия *равенства треугольников* целесообразно повторить с учащимися, как сравниваются отрезки и углы. При этом учащиеся вспомнят и метод *наложения*, который и позволяет сравнивать отрезки и углы.

В учебнике понятие *равенства треугольников*, как и понятия равенства отрезков и углов, вводится на основе наглядного представления: *наложения*. При совмещении двух равных треугольников попарно совмещаются их равные углы и стороны, т.е. у равных треугольников *«соответствующие»* элементы равны: *«в равных треугольниках против соответственно равных сторон лежат равные углы, и наоборот: против соответственно равных углов лежат равные стороны»*.

При этом полезно напомнить учащимся, как с помощью штрихов и дужек обозначаются равные стороны и углы треугольников.

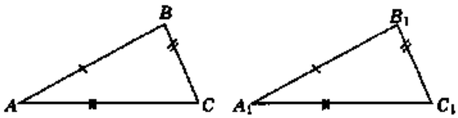


Рис. 31

На рисунке 31 в равных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ отмечены равные стороны: $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$. Отсюда следует равенство углов:

$\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$.

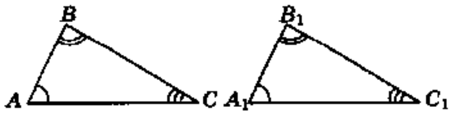


Рис. 32

На рисунке 32 представлена обратная ситуация: в равных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ отмечены равные углы: $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$. Отсюда следует равенство сторон:

$AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$.

Для закрепления определения равенства треугольников полезно предложить учащимся задачу 1 из дополнительных задач методического пособия.

> *При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать определения* ***треугольника****, его элементов, периметра треугольника. А затем решить задачи 83 и 84.*

Очень полезно устно решить в классе задачу 92 из учебника, в которой объединяются понятия равных треугольников и определение периметра.

3°. Так как доказательство *первого признака равенства треугольников* достаточно трудное, то его лучше провести полностью самому учителю. Включение же учащихся во фронтальную работу при первичном разборе теоремы может привести не только к значительным потерям времени, но и к тому, что от учащихся ускользнет основная идея доказательства, логическая последовательность рассуждений.

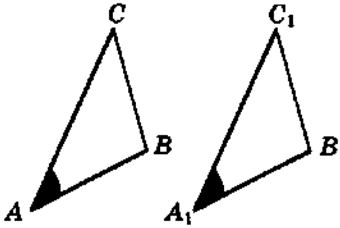


Рис. 33

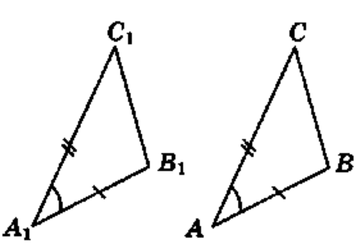


Рис. 34

Изучение теоремы начинается с формулировки теоремы и выполнения рисунка 33. При этом полезно выделить в треугольниках соответственно равные элементы более жирным изображением отрезков и углов или цветом.

Из формулировки теоремы «Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны» выделяется условие и заключение теоремы. После чего выполнить рабочий чертеж (рис. 34) и сделать краткую запись.

Дано: $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$

$AB = A_1B_1,\ AC = A_1C_1$

Доказать: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

<u>Доказательство.</u>

1. Так как $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$, то треугольник ABC можно наложить на треугольник $A_1B_1C_1$ так, что вершина A совместится с вершиной A_1, а стороны AB и AC наложатся соответственно на лучи A_1B_1 и A_1C_1.

2. Поскольку $AB = A_1B_1$, то сторона AB совместится со стороной A_1B_1, в частности, совместятся точки B и B_1.

3. Поскольку $AC = A_1C_1$, то сторона AC совместится со стороной A_1C_1, в частности, совместятся точки C и C_1.

Следовательно, совместятся стороны BC и B_1C_1.

После совпадения всех трех вершин в учебнике делается вывод о равенстве треугольников. Однако при этом пропускается обоснование того факта, что сторона CB совпадает со стороной C_1B_1, т.к. *через две* совпавшие *точки* (C с C_1 и B с B_1) *можно провести только одну прямую* и, значит, стороны CB и C_1B_1 совпадают.

4°. При решении задач довольно часто из равенства треугольников делают вывод о равенстве их элементов, т.е. по трем данным элементам треугольника устанавливается равенство элементов, не входящих в эту тройку. Поэтому после доказательства теоремы полезно привлечь внимание учащихся к тому факту, что если доказано $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, по *первому признаку равенства треугольников* ($AB = A_1B_1$; $AC = A_1C_1$; $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$), то отсюда следует, что $CB = C_1B_1$, $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$, $\angle BCA = \angle B_1C_1A_1$.

5°. Обучение применению *первого признака равенства треугольников* желательно начать с обучения школьников умению выделять три соответственно равных элемента данных треугольников по готовым чертежам. Для этого можно использовать плакаты такого типа, как на рисунке 35:

1. Определите, на каких рисунках есть равные треугольники.
2. Почему эти треугольники равны?

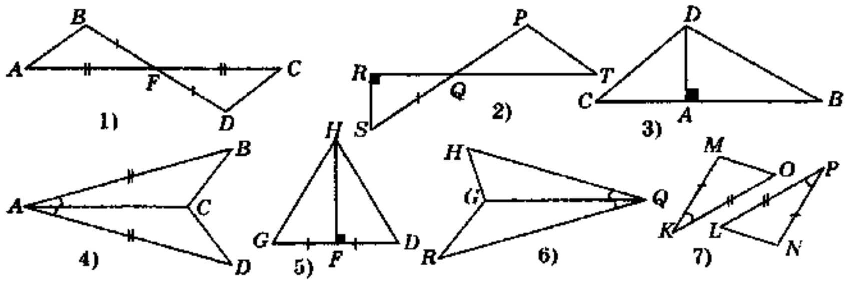


Рис. 35

После работы с плакатом можно выполнить задания по готовому чертежу, используя задачу 97 из учебника и задачи 2–4 из дополнительных задач методического пособия. Решение одной из этих задач полезно записать полностью в тетрадях учащихся, остальные — решить устно. Например, решение задачи 2 из дополнительных задач методического пособия.

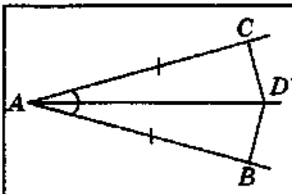


Рис. 36

Дано: *AD — биссектриса* $\angle BAC$;
$AB = AC$

Доказать: $\Delta BAD = \Delta CAD$.

Решение:

Рассмотрим ΔBAD *и* ΔCAD:

$AB = AC$ *по условию;*

$\angle BAD = \angle DAC$, *так как AD — биссектриса;*

AD — общая сторона.

Следовательно, $\Delta BAD = \Delta CAD$ (рис. 36) *по двум сторонам и углу между ними.*

Следует при этом обратить внимание учащихся на то, что правильная, геометрически грамотная ссылка на *первый признак равенства треугольников* должна быть именно в такой форме: *«по двум сторонам и углу между ними»*. Однако возможны и другие формы ссылки, например, полная формулировка или указание номера признака.

Учителю при решении задач необходимо уделить внимание работе с чертежами, научить школьников отмечать на чертежах равные элементы по условию задачи и находить равные элементы по рисунку с пометками при решении задач по готовому чертежу. На задачах, которые решаются письменно, полезно показать учащимся примеры оформления письменного решения и поощрять рациональные, лаконичные записи решения задач.

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировку ***первого признака равенства треугольников****. А после доказательства теоремы, проведенного учителем, выполнить задание 85, которое является полным аналогом работы с плакатом, но не требует от учителя значительных затрат времени на изготовление плаката. Затем предложить учащимся разобрать по тексту тетради решение задачи 86 и по аналогии решить задачу 87.*

В тетради приведено решение задача 88, которое рекомендуется учащимся разобрать самостоятельно. Затем можно предложить учащимся решить задачу 89. Использование в данной теме рабочей тетради позволяет сэкономить время учителя при подготовке к уроку, а также *время и на самом уроке и выполнить большее число заданий с записью в тетради. А у школьников будет хороший конспект урока, который, несомненно, поможет при выполнении домашнего задания.*

6˙. Задачи 2 и 4 из дополнительных задач методического пособия аналогичны задачам 94 и 98 из учебника, которые рекомендуются для домашнего задания.

7˙. На третьем уроке рекомендуется провести самостоятельную работу, первые два задания которой — это задания с кратким ответом, а третье задание — с развернутым ответом.

Примерное планирование изучения материала

На первом уроке: в классе — изложить весь теоретический материал параграфа 1; решить задачи 92 и 97 (устно) из учебника, 1–4 из дополнительных задач методического пособия; дома — вопросы 1–4 из вопросов для повторения к главе II, задачи 94 и 98 из учебника.

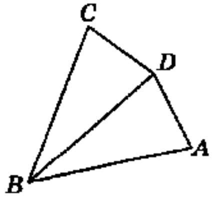
На втором уроке: в классе — провести самостоятельную работу; решить задачи 91, 96 и 99; дома — задачи 90, 93 и 95 из учебника.

Самостоятельная работа по теме: «Первый признак равенства треугольников».

Самостоятельная работа планируется на 10 мин.

1-й вариант

1. Треугольники ABC и KLM равны. Известно, что $\angle ABC = \angle KLM$; $\angle BCA = \angle LMK$; $AB = 9$ см, $AC = 12$ см. Чему равны соответствующие стороны треугольника KLM?
Ответ: KL =________; LM =________; MK =________.



2. Треугольники BDC и BDA равны и DC и DA тоже равны. Определите, в каком отношении луч BD делит угол CBA.

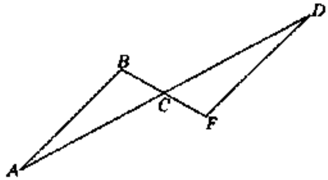
*Ответ:*________________________

3. К прямой a проведены перпендикулярные прямые AC и BD, причем $AC = BD$. Точки C и D принадлежат прямой a. Докажите, что $\Delta ACD = \Delta BDC$.

2-й вариант

1. Треугольники ABC и KLM равны. Известно, что $KL = AB$, $LM = BC$. Найдите соответствующие углы треугольника KLM, если $\angle ABC = 73°$, $\angle BCA = 37°$.

Ответ: $\angle KLM =$________; $\angle LMK =$_______; $\angle MKL =$_____.



2. На рисунке треугольники ABC и DFC равны. Определите, в каком отношении точка C делит отрезок AD.

Ответ: ________________________

3. По одну сторону от прямой AB отмечены точки C и D так, что $\angle CAB = \angle DBA$ и $DB = CA$. Докажите равенство треугольников ADB и BCA.

Указания к решению задач

Задача 99 на данном этапе изучения геометрии является задачей повышенной сложности. Ее необходимо решить в классе, так как в этой задаче достаточно сложно определить, что искомые углы являются смежными углами треугольников, равенство которых можно доказать, исходя из условия задачи. Решение этой и аналогичных ей задач наиболее способствует развитию пространственных представлений учащихся и обучению школьников умению выделять из чертежа к задаче конфигурацию, необходимую для применения определения или теоремы. На рисунке 37 отражено условие задачи.

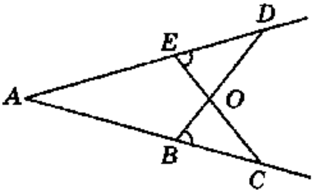


Рис. 37

<u>Доказательство</u> 1. $AB = AE$ и $AD = AC$ (по условию).

2. $\angle A$ — общий;

3. Тогда $\Delta ADB = \Delta ACE$ (по двум сторонам и углу между ними).

4. Отсюда $\angle AEC = \angle ABD$, так как в равных треугольниках против соответственно равных сторон лежат равные углы.

5. $\angle CED = \angle DBC$, так как являются смежными с углами AEC и ABD соответственно.

Дополнительные задачи

1. Треугольники DFG и PQR равны. Известно, что $\angle DFG = \angle PQR$; $\angle FGD = \angle QRP$; $DF = 7$ см, $DG = 14$ см. Чему равны соответствующие стороны треугольника PQR?

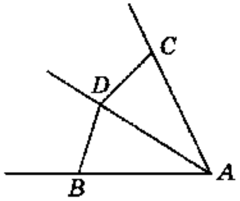


Рис. 38

2. На рисунке 38 луч BD является биссектрисой $\angle ABC$, на сторонах которого отложены равные отрезки BA и BC. Докажите равенство треугольников BAD и CBD.

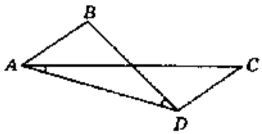


Рис. 39

3. В треугольниках BAD и CDA стороны BD и AC, а также углы ADB и DAC равны. Докажите равенство треугольников BAD и CDA (рис. 39).

Рис. 40

4. Точки D и D_1 являются серединами соответствующих сторон AC и A_1C_1 равных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. Докажите, что $\Delta ABD = \Delta A_1B_1D_1$, если $\angle ACB = \angle A_1C_1B_1$ (рис. 40).

§2. Медианы, биссектрисы и высоты треугольников (3 ч)

Комментарий для учителя

Понятие равнобедренного треугольника достаточно просто, поэтому подготовительной работы не требуется. Введение определений понятий *медианы*, *биссектрисы* и *высоты* треугольника позволяет в значительной степени расширить класс задач, в решении которых используется прием *«подведение под определение»*. Изучаемые в этом параграфе свойства равнобедренного треугольника также позволяют расширить класс содержательных задач, в решении которых они применяются в сочетании с изученным раннее признаком равенства треугольников, свойствами смежных и вертикальных углов, свойством двух прямых, перпендикулярных третьей.

Текущие результаты изучения параграфа 2. Учащиеся должны:

– изображать и обозначать на чертежах и рисунках «перпендикуляр к прямой», «медиану треугольника», «биссектрису треугольника», «высоту треугольника» и равнобедренный треугольник, используя общепринятые обозначения равных элементов, перпендикуляра, принадлежности точек прямой;

– распознавать на чертежах и рисунках «перпендикуляр к прямой», «медиану треугольника», «биссектрису треугольника», «высоту треугольника», равнобедренные и равносторонние треугольники, используя общепринятые обозначения равных элементов, перпендикуляра, принадлежности точек прямой или известные свойства фигур;

– формулировать и доказывать теорему о *прямой, перпендикулярной данной*, свойство *углов равнобедренного треугольника* и теорему о *биссектрисе равнобедренного треугольника, проведенной к основанию*;

– формулировать и объяснять свойства медиан, биссектрис и высот треугольника;

– решать задачи с использованием:

- определений медиан, биссектрис и высот треугольника, равнобедренного треугольника,
- теоремы о прямой, перпендикулярной данной, о биссектрисе равнобедренного треугольника, проведенной к основанию, о свойстве углов равнобедренного треугольника.

Методические рекомендации к изучению материала

1°. Поскольку определение *перпендикуляра к прямой* опирается на понятие перпендикулярных прямых, то перед введением определения *перпендикуляр к прямой* следует вспомнить определение перпендикулярных прямых.

Введенное в пункте понятие *перпендикуляра к прямой* находит применение непосредственно в следующем пункте при определении высоты треугольника.

> *При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует записать определение* ***перпендикуляра к прямой****, решить задачу 90 и сформулировать теорему о* ***прямой, перпендикулярной данной.***

2°. Следует обратить внимание учащихся на то, что теорема о *прямой, перпендикулярной данной* (*из точки, не лежащей на прямой, можно провести перпендикуляр к этой прямой, и притом только один*), содержит два утверждения: существование перпендикуляра (*из точки, не лежащей на прямой, можно провести перпендикуляр к этой прямой*) и его единственность (*и только один*). Поэтому доказательство каждой части теоремы целесообразно провести отдельно, как самостоятельную теорему. Заметим, что при доказательстве используются разные методы: первая часть доказывается *конструктивно*, а вторая часть — неявным применением *метода от противного*, сущность которого будет изложена в главе 3 (§2).

Как и при доказательстве теоремы *о двух прямых, перпендикулярных к третьей*, в доказательстве первой части теоремы о *прямой, перпендикулярной данной*, неявно используется понятие *осевой симметрии*, которое опирается на понятие равенства углов как углов, совмещаемых наложением.

Так же как при доказательстве теоремы *о двух прямых, перпендикулярных к третьей*, и *первого признака равенства треугольников*, рекомендуется провести доказательство теоремы *о прямой, перпендикулярной данной*, полностью самому учителю.

1-я часть. *Из точки, не лежащей на прямой, можно провести перпендикуляр к этой прямой*. В основе доказательства лежит идея построения. Поэтому представляется полезным, поскольку доказательство конструктивно, проводить его одновременно с построением чертежа. Можно рекомендовать, как и при доказательстве теоремы *о двух прямых, перпендикулярных к третьей*, сделать рисунок 56 б) из учебника на кальке или ином прозрачном материале и в процессе доказательства теоремы на нем продемонстрировать совмещение лучей BA и BA_1.

2-я часть. *Из точки, не лежащей на прямой, можно провести только один перпендикуляр к этой прямой*.

Доказательство. Один перпендикуляр к прямой BC уже построен — это перпендикуляр AH (рис. 57 из учебника). Допустим, что существует еще один перпендикуляр AH_1 к прямой BC, проведенный из точки A. Получили, что две прямые AH и AH_1, перпендикулярные к прямой BC, пересекаются в точке A. Что невозможно в силу теоремы *о двух прямых, перпендикулярных к третьей*.

3°. При введении определения *медианы, биссектрисы и высоты треугольника* основное внимание необходимо направить не столько на запоминание учащимися формулировок определений, сколько на их понимание, умение распознавать и изображать их на рисунках, применять при решении задач, уметь производить краткую запись в условии задачи и в ходе ее решения:

– если в условии сказано: «*проведена медиана BD треугольника ABC* ...», то учащиеся должны уметь выделить равные отрезки $AD = DC$;

– если в условии сказано: «*проведена высота BD треугольника ABC* ...», то учащиеся должны уметь выделить либо перпендикулярные отрезки $AD \perp DC$, либо прямые углы $\angle BDA = \angle BDC = 90°$;

– если в условии сказано: «*проведена биссектриса BD треугольника ABC* ...», то учащиеся должны уметь выделить равные углы $\angle ABD = \angle CBD$.

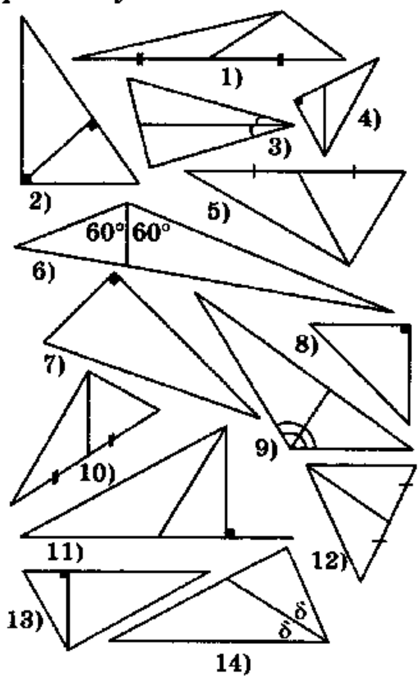


Рис. 41

Формулировки определений *медианы, биссектрисы и высоты треугольника* целесообразно сопровождать выполнением на доске их построения.

Для закрепления введенных понятий можно провести работу, используя плакат или готовые рисунки (рис. **41**):

1. Среди треугольников, изображенных на рисунке, найдите треугольники, в которых проведены высоты.

2. Среди треугольников, изображенных на рисунке, найдите треугольники, в которых проведены медианы.

3. Среди треугольников, изображенных на рисунке, найдите треугольники, в которых проведены биссектрисы.

После работы по готовым чертежам полезно предложить учащимся устно выполнить упражнения 1 и 2 из дополнительных задач методического пособия.

В конце работы над понятиями *медианы, биссектрисы и высоты треугольника* учащимся без доказательств сообщаются их важные свойства, которыми можно пользоваться при решении задач.

> *При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует записать формулировки определений* ***медианы, биссектрисы и высоты треугольника****, а для закрепления введенных понятий целесообразно выполнить задания 91–93, которые являются полным аналогом работы с приведенным выше плакатом. Затем полезно предложить учащимся упражнения 94–96. Задания 91–93 направлены на закрепление умения распознавать введенные понятия на рисунках, а задания 94–96 — на их понимание*

4°. Понятие равнобедренного треугольника достаточно просто, поэтому подготовительной работы не требуется. При введении определения *равнобедренного треугольника* основное внимание необходимо направить не на запоминание учащимися формулировки определения, а на его понимание. Другими словами, если в условии сказано: *«Треугольник ABC — равнобедренный с основанием AC ...»*, то учащиеся должны уметь выделить равные стороны $AB = BC$ (записать в ходе решения задачи или сразу в краткой записи условия). Отработка этого навыка будет проходить в процессе изучения всей темы.

В учебнике вводятся понятия боковой стороны и основания треугольника, но нет специального названия для вершины, лежащей против основания равнобедренного треугольника (во многих пособиях используется название *«вершина равнобедренного треугольника»*), поэтому при формулировках утверждений необходимо уточнение: *вершина, противолежащая основанию*.

Частным случаем равнобедренного треугольника является *равносторонний треугольник*, для него верны все свойства *равнобедренного треугольника*. При этом за основание *равностороннего треугольника* можно выбрать любую сторону.

На закрепление понятия *равнобедренного треугольника* и определений его сторон можно предложить устно выполнить упражнения 3 и 4 из дополнительных задач методического пособия и задачу 109 из учебника.

Введенное определение *равнобедренного треугольника* позволяет в значительной степени расширить класс задач, в решении которых используется прием *подведение под определение*. Рассмотрим задачу 5 из дополнительных задач методического пособия:

> «В равных треугольниках DEA и FEB: $\angle D = \angle F$. Докажите, что AEB — равнобедренный треугольник».

Ее решение рекомендуется выполнить по готовому чертежу с записью условия на доске учителем.

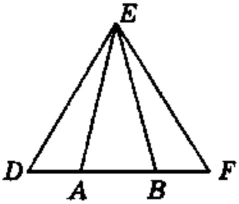


Рис. 42

Дано: $\Delta DEA = \Delta FEB$;
$\angle D = \angle F$

Доказать: ΔAEB — *равнобедренный.*

Решение:

$EA = EB$, так как в равных треугольниках DEA и FEB против равных углов $\angle D = \angle F$ лежат равные стороны.

Значит: ΔAEB — равнобедренный по определению *(рис. 42)*.

В рабочей тетради следует предложить учащимся записать определение ***равнобедренного треугольника****. А на закрепление этого понятия и определений сторон равнобедренного треугольника можно предложить устно выполнить задания 97–100, причем задачи 97 и 100 являются теми же задачами, что и задачи 3 и 4 из дополнительных задач. В рабочей тетради выше приведенная задача вместе с решением дана под номером 101. Ее решение следует разобрать по тексту тетради.*

5°. Перед доказательством *свойства углов равнобедренного треугольника* полезно вспомнить с учащимися используемый в доказательстве *первый признак равенства треугольников*. Это можно сделать в ходе решения следующей задачи, которая является *первым признаком равенства треугольников для равнобедренных треугольников* и позволяет вспомнить *первый признак равенства треугольников*. Как и вышеприведенную задачу 5, ее рекомендуется решить фронтально по готовому чертежу с записью условия на доске учителем, но без записи в тетрадях учащихся. Для экономии учебного времени полезно сделать для обеих задач плакаты и по ним разобрать решения.

Первый признак равенства равнобедренных треугольников: *Если боковая сторона и угол при вершине, противолежащей основанию, одного равнобедренного треугольника равны боковой стороне и углу при вершине, противолежащей основанию, другого равнобедренного треугольника, то такие треугольники равны (рис. 43).*

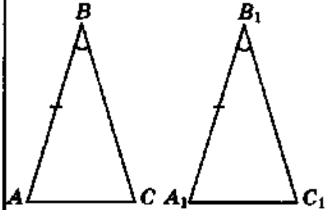


Рис. 43

Дано: ΔABC — *равнобедренный;*

$\Delta A_1B_1C_1$ — *равнобедренный;*

$AB = A_1B_1$;

$\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$

Доказать: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

Доказательство.

$AB = BC$, *так как по условию* ΔABC — *равнобедренный;*

$A_1B_1 = B_1C_1$, *так как по условию* $\Delta A_1B_1C_1$ — *равнобедренный;*

$BC = B_1C_1$, *так как по условию* $AB = A_1B_1$;

Рассмотрим ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$: $AB = A_1B_1$ *по условию;*

$\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$ *по условию;*

$BC = B_1C_1$ *по доказанному выше.*

Следовательно, $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ *по двум сторонам и углу между ними.*

В рабочей тетради выше приведенная задача вместе с решением дана под номером 103. Ее решение следует фронтально разобрать по тексту тетради. Такая работа является аналогом работы с плакатом, но не требует от учителя значительных затрат времени на изготовление плаката. Кроме того, наличие рабочей тетради позволяет сэкономить время на уроке, при этом запись решения задачи поможет учащимся в дальнейшем при решении аналогичных задач.

6°. Доказательство теоремы о *свойстве углов равнобедренного треугольника* (*В равнобедренном треугольнике углы при основании равны*) достаточно просто, поэтому его можно переформулировать в виде задачи:

Треугольник ABC — равнобедренный с основанием BC. Докажите, что $\angle B = \angle C$.

Ее решение рекомендуется выполнить фронтально по готовому чертежу с записью условия на доске учителем (рис. 44).

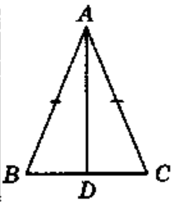


Рис. 44

Дано: *ABC — равнобедренный треугольник;*
BC — основание треугольника

Доказать: $\angle B = \angle C$

Доказательство.

Проведем в треугольнике ABC биссектрису AD угла BAC.

Рассмотрим ΔABD и ΔACD:

AB = AC, так как по условию $\Delta A_1B_1C_1$ — равнобедренный;

$\angle BAD = \angle CAD$ по построению биссектрисы AD угла BAC;

AD — общая сторона.

Следовательно, $\Delta ABD = \Delta ACD$ по двум сторонам и углу между ними.

Из равенства треугольников следует, что $\angle B = \angle C$.

7°. Обучение применению *свойства углов равнобедренного треугольника* можно начать с решения задач по готовым чертежам, используя для этого плакаты такого типа, как на рисунке 45:

1. Треугольник ABC равнобедренный с основанием AC, $\angle C = 78°$. Чему равен $\angle A$ (рис. 45 а)?

2. По данным рисунка 45 б) *определите $\angle DHG$, если треугольник DGH — равнобедренный.*

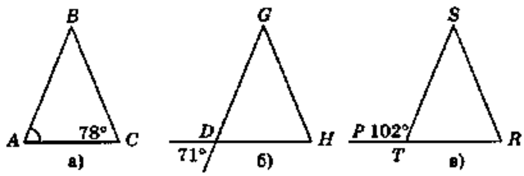


Рис. 45

3. По данным рисунка 45 в) *определите $\angle SRT$, если треугольник TSR — равнобедренный.*

В ходе предложенных упражнений можно продолжить обучение школьников умению по условию задачи «*Треугольник ABC — равнобедренный с основанием AC...*» находить в треугольнике равные стороны *AB* = *BC*. В выше предложенных задачах **1–3** на рисунках не отмечены равные стороны, а в формулировках задач сказано, что треугольники равнобедренные, значит, надо на рисунках отметить равные элементы в процессе решения задач.

На непосредственное применение теоремы о *свойстве углов равнобедренного треугольника* из учебника можно рекомендовать задачи **115** и **116**.

*В рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировку **свойства углов равнобедренного треугольника**. На закрепление **свойства углов равнобедренного треугольника** выполнить задания **104–106**, причем эти задачи из рабочей тетради являются аналогами задач, рекомендованных для работы по готовым чертежам (рис. **45 а–в**). Согласно рекомендациям, данным в рабочей тетради к задачам, задачу **104** следует решить устно и записать только ответ; решение задачи **105** разобрать по тексту тетради; а решение задачи **106** выполнить письменно. Задачам **115** и **116** из учебника в рабочей тетради соответствуют задачи **109** и **110**; причем решение задачи **110** приведено в тексте тетради.*

8°. Доказательство *теоремы о свойстве биссектрисы равнобедренного треугольника* (*В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведенная к основанию, является медианой и высотой*) достаточно простое, поэтому, как и теорему о *свойстве углов равнобедренного треугольника*, его формулировку можно дать в виде задачи:

Треугольник ABC — равнобедренный с основанием BC. Отрезок AD — биссектриса угла, противолежащего основанию. Докажите, что AD — медиана и высота треугольника.

Ее решение рекомендуется выполнить по готовому чертежу с записью условия на доске учителем, при этом можно использовать чертеж, сделанный к теореме о *свойстве углов равнобедренного треугольника* (рис. **44**).

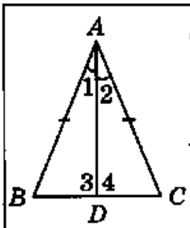


Рис. 46

Дано: ΔABC — *равнобедренный треугольник*;
BC — *основание треугольника*;
AD — *биссектриса*
$\angle 1 = \angle 2$ (рис. 46)

Доказать: AD — *медиана и высота*.

Доказательство.

Рассмотрим ΔABD и ΔACD:

$AB = AC$, так как по условию ΔABC — равнобедренный;

$\angle BAD = \angle CAD$, так как по условию AD — биссектриса угла BAC;

AD — общая сторона.

Следовательно, $\Delta ABD = \Delta ACD$ по двум сторонам и углу между ними.

Из равенства треугольников следует, что $BD = DC$ и $\angle 3 = \angle 4$.

Равенство $BD = DC$ означает, что точка D — середина стороны BC и AD — медиана треугольника.

Так как $\angle 3$ и $\angle 4$ смежные и равны друг другу, то они прямые. Значит, отрезок

$AD \perp BC$ и является также высотой треугольника ABC.

Таким образом, установлено, что биссектриса, медиана и высота равнобедренного треугольника, проведенные к его основанию, совпадают. Поэтому справедливы также утверждения:

1. *Высота равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является медианой и биссектрисой.*

2. *Медиана равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является высотой и биссектрисой.*

Приведенные утверждения вместе с теоремой *о свойстве биссектрисы равнобедренного треугольника* могут использоваться при решении задач. Особенно это относится к утверждению 2, которое активно используется в задачах на применение теоремы Пифагора.

Здесь полезно обсудить следующий вопрос: всегда ли верно утверждение:

«Биссектриса равнобедренного треугольника является одновременно его медианой и высотой»?

Обсуждение этого утверждения позволяет еще раз обратить внимание учащихся на формулировку теоремы, в которой сказано, что утверждение верно только для *биссектрисы равнобедренного треугольника, проведенной к основанию треугольника* или *проведенной из вершины, противолежащей основанию.*

В качестве заданий на непосредственное применение теоремы о *свойстве биссектрисы равнобедренного треугольника* можно использовать задания **11–13** по готовым чертежам из дополнительных задач методического пособия.

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировку теоремы о ***свойстве биссектрисы равнобедренного треугольника.*** *А после доказательства теоремы целесообразно выполнить задания* ***113, 115*** *и* ***116****, которые в дополнительных задачах методических рекомендаций даны под номерами* ***10–12****. Эти задания направлены на формирование умения применять теорему о* ***свойстве биссектрисы равнобедренного треугольника*** *при решении задач.*

9°. Примерное планирование изучения материала, предлагаемое к данному параграфу, можно несколько изменить. Поскольку при решении задач, рекомендованных к параграфу, уже начиная с пятой задачи (задача **109**), требуется знание всего теоретического материала параграфа, то представляется возможным, если позволяет уровень подготовки учащихся, на первом уроке изложить весь теоретический материал параграфа в форме беседы, но с ограниченным привлечением учащихся. Второй и третий уроки посвятить решению задач и выполнению в конце третьего урока самостоятельной работы. Задачный материал учебника в этом случае можно дополнить задачами из раздела *дополнительные задачи* как учебника, так и методических рекомендаций.

Предлагаемое ниже планирование предполагает, что проверка усвоения учащимися доказательства теорем будет проводиться на третьем уроке. При этом рекомендуется доказательство теоремы *о прямой, перпендикулярной данной*, спрашивать только хорошо успевающих учеников. Однако проверку решения домашних задач необходимо провести и на втором и на третьем уроках. Учащимся обязательно нужно сообщить, что на третьем уроке будет проведена проверка знания теорем параграфа и умения их доказывать.

Примерное планирование изучения материала

На первом уроке: в классе — изложить весь теоретический материал пунктов **16**, **17** и ввести понятие равнобедренного треугольника из пункта **18**; решить задачу **109** из учебника и задачи **1–5** из дополнительных задач методического пособия; дома — вопросы 5–11 из вопросов для повторения к главе II, решить задачи **105–108**.

На втором уроке: в классе — изложить весь теоретический материал пункта 18, решить задачи **115** и **116** и задачи **11–13** из дополнительных задач методического пособия; дома — вопросы 12 и 13 из вопросов для повторения к главе II, решить задачи **111–113**.

На третьем уроке: в классе — провести опрос по теме: *«Медианы, биссектрисы и высоты треугольника»*, решить задачи: **110, 114, 118**, провести самостоятельную работу; дома — задачи **117, 119** и **120**.

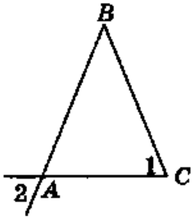
Самостоятельная работа по теме: «Медианы, биссектрисы и высоты треугольника. Равнобедренный треугольник»

Самостоятельная работа планируется на 15 мин.

1-й вариант

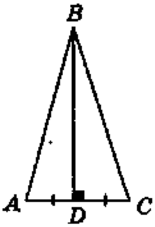
1. В равнобедренном треугольнике ABC основание AC равно 7 см, а периметр равен 17 см. Найдите боковую сторону AB.

Ответ: ____________________



2. Треугольник ABC — равнобедренный с основанием AC. Определите $\angle 2$, если $\angle 1 = 56°$.

Ответ: ____________________

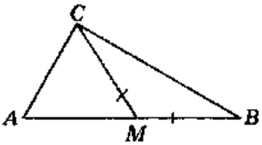


3. В треугольнике ABC высота BD является медианой треугольника. Найдите периметр треугольника ABC, если периметр треугольника ABD равен 15 см, а высота BD равна 4 см.

Ответ: ____________________

4. Определите вид треугольника, если одна его сторона равна 5 см, вторая — 3 см, а периметр равен 13 см.

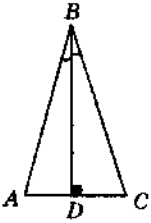
Ответ: 1. равнобедренный треугольник;
2. равносторонний треугольник;
3. разносторонний треугольник;
4. такой треугольник не существует.



5. В треугольнике ABC проведена медиана CM. Известно, что $CM = MB$, $\angle CAM = 68°$, $\angle ACB = 90°$. Найдите угол MBC.
Ответ: ____________________

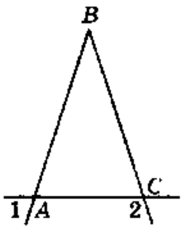
2-й вариант

1. В равнобедренном треугольнике ABC основание AC на 3 см больше его боковой стороны AB, а периметр равен 24 см. Найдите боковую сторону AB.
Ответ: ____________________

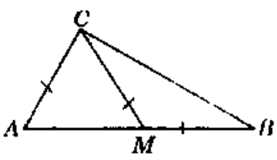


2. В треугольнике ABC биссектриса BD является высотой треугольника. Найдите периметр треугольника ABC, если периметр треугольника ABD равен 14 см, а биссектриса BD равна 3 см.
Ответ: ____________________

3. Определите вид треугольника, если одна его сторона равна 5 см, вторая — 3 см, а периметр равен 15 см.
Ответ: 1. равнобедренный треугольник;
2. равносторонний треугольник;
3. разносторонний треугольник;
4. такой треугольник не существует.



4. Треугольник ABC — равнобедренный с основанием AC. Определите $\angle 2$, если $\angle 1 = 64°$.
Ответ: ____________________



5. В треугольнике ABC проведена медиана CM. Известно, что $CM = BM = AC$, $\angle ACB = 90°$, $\angle CMB = 120°$. Найдите угол MCB.
Ответ: ____________________

Указания к задачам

Задачи 108 и 116 отражают важные свойства равностороннего треугольника, его принципиальное отличие от всех других треугольников, а именно, все его стороны равны и все его углы равны. Фактически в систематическом курсе геометрии это первый правильный многоугольник, с которым учащиеся работают.

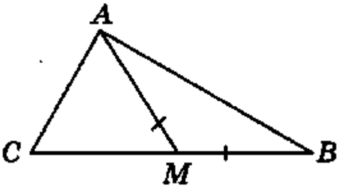


Рис. 47

Задача 110 является признаком равнобедренного треугольника, поэтому ее рекомендуется решить в классе и объяснить учащимся, что если в треугольнике медиана совпадает с высотой, то такой треугольник — равнобедренный.

115. Решение: $\angle BAM = \angle ABM$, *так как по условию* $AM = BM$; $\angle CAM = \angle ACM$, *так как* AM — *медиана, а значит,* $BM = MC$; $\angle BAC = \angle CAM + \angle BAM$, *следовательно,* $\angle BAC = \angle ACB + \angle ABC$ (рис. 47):

> В рабочей тетради эта задача (110) дается с числовыми значениями *«В треугольнике ABC:* $AD = BD = DC$, $\angle A = 53°$, $\angle C = 37°$. *Найдите* $\angle ABC$*»*.

В условии задачи 118 сказано, что точки M и N расположены на основании равнобедренного треугольника. Однако полезно рассмотреть и другое расположение точек M и N, когда точки лежат на продолжении основания треугольника в обе стороны, и убедиться, что решение будет точно таким же (задача 9 из дополнительных задач методического пособия).

Дополнительные задачи

1. Может ли высота треугольника находиться вне треугольника?

2. Две стороны треугольника равны 5 см и 3 см. Медиана, проведенная к третьей стороне, делит данный треугольник на два. Найдите разность периметров этих треугольников.

3. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 7 см, а основание — 4 см. Вычислите периметр треугольника.

4. В равностороннем треугольнике сторона равна 7 см. Вычислите периметр треугольника.

5. В равных треугольниках DEA и FEB: $\angle D = \angle F$. Докажите, что ΔAEB — равнобедренный (рис. 48).

6. На сторонах угла A отложены равные отрезки AB и AC, а на биссектрисе угла A отмечена точка D. Докажите, что треугольник DBC равнобедренный. Укажите его основание.

7. Треугольник TSR — равнобедренный с основанием TR (рис. 49).

а) Докажите, что $\angle STP = \angle SRQ$.

б) Определите градусную меру угла STP, если $\angle SRT = 46°$.

в) Определите градусную меру углов STR и SRT, если $\angle SRQ = 134°$.

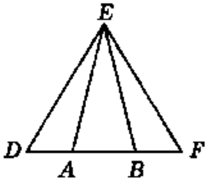


Рис. 48

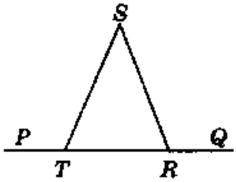


Рис. 49

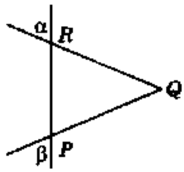


Рис. 50

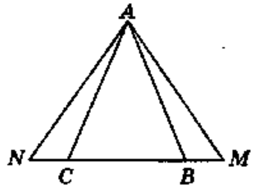


Рис. 51

8. На сторонах угла Q отложены равные отрезки QR и QP. Через точки P и R проведена прямая. Докажите, что $\angle\alpha = \angle\beta$ (рис. 50).

9. На продолжении основания CB равнобедренного треугольника ACB отложены равные отрезки BM и CN (рис. 51). Докажите, что треугольники CAM и BAN равны.

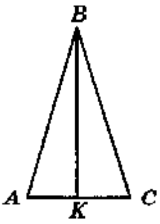


Рис. 52

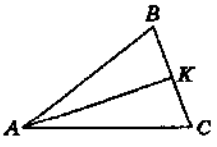


Рис. 53

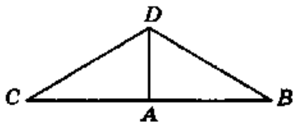


Рис. 54

10. Отрезок BK — биссектриса равнобедренного треугольника ABC, проведенная к основанию AC. Найдите AK, если $AC = 46$ см (рис. 52).

11. Отрезок AK — высота равнобедренного треугольника BAC, проведенная к основанию BC. Найдите $\angle BAK$ и $\angle BKA$, если $\angle BAC = 46°$ (рис. 53).

12. Отрезок DA — медиана равнобедренного треугольника BDC, проведенная к основанию CB. Найдите углы треугольника ADC, если $\angle BDC = 120°$, $\angle DBC = 30°$ (рис. 54).

13. В равнобедренном треугольнике ABC проведена биссектриса AD к основанию CB. Докажите равенство треугольников BDK и CDK, где K — произвольная точка отрезка AD.

14. В равностороннем треугольнике ABC медианы AD и BE пересекаются в точке K. Докажите, что $\Delta AKE = \Delta BKD$.

15. В равностороннем треугольнике ABC проведены медианы CM и BK. Докажите, что $\Delta BMC = \Delta BKC$.

§3. Второй и третий признаки равенства треугольников (3 ч)

Комментарий для учителя

Доказательства *первого и второго признаков равенства треугольников*, а также их применение к решению задач практически аналогичны. Опыт показывает, что изучение *второго признака равенства треугольников*, используя эту аналогию, приводит к лучшему усвоению обоих признаков равенства треугольников учащимися. Кроме того, после изучения доказательства *второго признака равенства треугольников* учащиеся лучше понимают тот прием доказательства, который был использован при доказательстве *первого признака равенства треугольников*. Доказательство *третьего признака равенства треугольников* достаточно трудное и отличается от доказательства *первого и второго признаков равенства треугольников*, поэтому рекомендуется провести его полностью самому учителю. Внимание учащихся необходимо сосредоточить на основной идее доказательства и логической последовательности рассуждений.

Текущие результаты изучения параграфа 3.

Учащиеся должны:

– изображать, обозначать и распознавать на чертежах и рисунках треугольники, равные по второму и третьему признакам равенства треугольников, используя обозначения равных элементов или известные свойства фигур;

– формулировать и объяснять формулировки второго и третьего признаков равенства треугольников;

– доказывать (требование только для сильных учащихся) второй и третий признаки равенства треугольников;

– решать задачи с использованием второго и третьего признаков равенства треугольников.

Методические рекомендации к изучению материала

1°. Так же как и при изучении *первого признака равенства треугольников*, лучше будет самому учителю дать полное доказательство теоремы. Однако если уровень геометрической подготовки и темп работы класса позволяют, то доказательство *второго признака равенства треугольников* можно провести и в форме беседы, фактически повторяя доказательство первого признака равенства треугольников. В ходе доказательства второго признака равенства треугольников следует явно указать на имеющуюся аналогию с доказательством первого признака равенства треугольников.

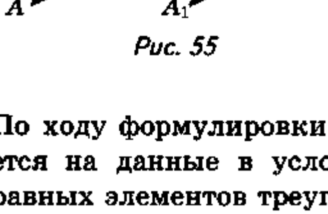


Рис. 55

Изучение теоремы начинается с формулировки теоремы и выполнения рисунка 55. По ходу формулировки теоремы внимание учащихся акцентируется на данные в условии теоремы три пары соответственно равных элементов треугольников.

Из формулировки теоремы «*Если сторона и два угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум углам другого треугольника, то такие треугольники равны*» выделить условие и заключение теоремы. Изложение доказательства *второго признака равенства треугольников*, как и изложение *первого признака равенства треугольников*, необходимо начать с записи условия теоремы и выполнения рабочего чертежа (рис. 56).

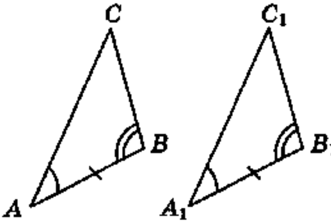


Рис. 56

Дано: $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$,
$\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$
$AB = A_1B_1$

Доказать: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

Доказательство.

1. Так как $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$, то треугольник ABC можно наложить на треугольник $A_1B_1C_1$ так, что вершина A совместится с вершиной A_1, а стороны AB и AC наложатся соответственно на лучи A_1B_1 и A_1C_1.

2. Поскольку $AB = A_1B_1$, то сторона AB совместится со стороной A_1B_1, в частности, совместятся точки B и B_1.

3. Поскольку сторона AC наложится на луч A_1C_1, то точки C и C_1 лежат в одной полуплоскости относительно прямой AB.

4. Так как $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$, а точки B и B_1 совпадают, то сторона BC наложится на луч B_1C_1.

5. Поэтому вершина C — общая точка сторон AC и BC окажется лежащей как на луче A_1C_1, так и на луче B_1C_1 и, значит, совместится с общей точкой этих лучей — вершиной C_1.

6. Следовательно, совместятся стороны AC и A_1C_1, BC и B_1C_1. Итак, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ полностью совместятся, значит, они равны.

2°. После доказательства *второго признака равенства треугольников* полезно, как и после доказательства *первого признака равенства треугольников*, обратить внимание учащихся на то, что если доказано равенство $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ по *второму признаку равенства треугольников* ($AB = A_1B_1$; $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$; $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$), то отсюда следует, что $CB = C_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle BCA = \angle B_1C_1A_1$.

3°. Обучение применению *второго признака равенства треугольников* полезно, как и при изложении *первого признака*, начать с обучения школьников умению выделять три соответственно равных элемента данных треугольников по готовым чертежам. Для этого можно использовать плакаты такого типа, как на рисунке 57:

1. Определите, на каких рисунках есть равные треугольники.

2. Почему эти треугольники равны?

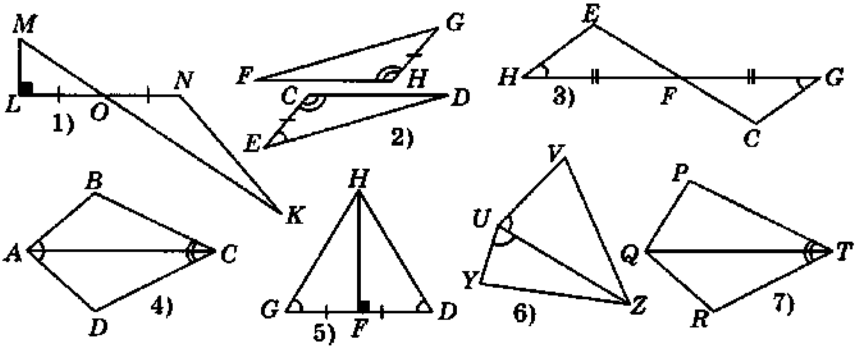


Рис. 57

Как и при изложении первого признака, после работы с плакатом можно предложить учащимся выполнить устно задания по готовому чертежу, используя упражнения 1 и 2 из дополнительных задач методического пособия. Решение задачи 3 из дополнительных задач с выполнением чертежа желательно записать полностью в тетрадях:

> *Отрезки AD и CF — биссектрисы углов CAB и ACB треугольника ABC соответственно, ∠CAB = ∠ACB. Докажите равенство треугольников ADC и CFA* (рис. 58).

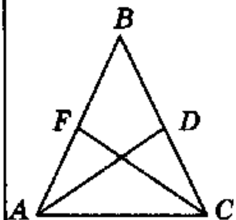


Рис. 58

Дано: *AD — биссектриса ∠CAB;*
CF — биссектриса ∠ACB;
∠CAB = ∠ACB

Доказать: Δ*ADC* = Δ*CFA* (Рис. 58).

Доказательство

∠CAD = ∠FAD, так как AD — биссектриса ∠CAB;

∠ACF = ∠DCF, так как CF — биссектриса ∠ACD;

∠CAD = ∠FAD = ∠ACF = ∠DCF, так как ∠CAB = ∠ACB; отсюда ∠CAD = ∠ACF.

Рассмотрим ΔADC и *ΔCFA: ∠CAD = ∠ACF по доказанному выше;*

∠CAB = ∠ACB по условию;

AC — общая сторона.

Следовательно, ΔADC = ΔCFA по стороне и прилежащим к ней углам.

И снова обратим внимание учащихся на то, что правильная, геометрически грамотная ссылка на *второй признак равенства треугольников* должна быть именно в такой форме: *«по стороне и прилежащим к ней углам»*. Возможны и другие формы ссылки, например, полная формулировка или указание номера признака.

При решении задач необходимо продолжать уделять внимание работе с чертежами, учить школьников отмечать на чертежах равные элементы по условию задачи и находить равные элементы по рисунку с пометками при решении задач по готовому чертежу.

4°. Предлагаемое ниже планирование предполагает, что проверка усвоения учащимися доказательства и второго и третьего признаков равенства треугольников будет проводиться на третьем уроке. При этом рекомендуется доказательство теорем спрашивать только хорошо успевающих учеников. Однако проверку решения домашних задач необходимо провести и на втором и на третьем уроках. Учащимся обязательно должно быть сообщено, что на третьем уроке будет проведена проверка умения доказывать *второй и третий признаки равенства треугольников*.

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировку ***второго признака равенства треугольников****. А после доказательства теоремы выполнить задание* ***118****, которое является полным аналогом работы с плакатом. Затем предложить учащимся разобрать по тексту тетради решение задачи* ***119*** *и по аналогии решить задачи* ***120*** *и* ***121****.*

Задача ***119*** *из тетради и задача 3 из дополнительных задач методического пособия являются одной и той же задачей. Задаче* ***134*** *из учебника в рабочей тетради соответствует задача* ***122****.*

5°. При доказательстве *третьего признака равенства треугольников* возникают три варианта расположения треугольников. Поэтому можно порекомендовать доказательство одного из возможных вариантов провести полностью самому учителю, а доказательство двух других провести в форме фронтальной работы с классом.

Изучение теоремы начинается с формулировки теоремы и выполнения рисунка 59. При этом полезно выделить в треугольниках соответственно равные элементы.

Из формулировки теоремы «*Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны*» выделить условие и заключение теоремы. Изложение доказательства *третьего признака равенства треугольников*, как и изложение *первых двух признаков равенства треугольников*, необходимо начать с записи условия теоремы.

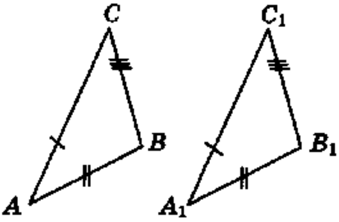


Рис. 59

Дано: $BC = B_1C_1$,
$AB = A_1B_1$,
$AC = A_1C_1$ (рис. 59).

Доказать: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

Доказательство.

Приложим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ друг к другу так, чтобы вершина A совпала с вершиной A_1, вершина B с вершиной B_1, а вершины C и C_1 находились в разных полуплоскостях.

При этом возможны три варианта расположения треугольников: луч C_1C проходит внутри угла $A_1C_1B_1$ (рис. 60 а); луч C_1C является стороной угла $A_1C_1B_1$ (рис. 60 б); луч C_1C проходит вне угла $A_1C_1B_1$ (рис. 60 в).

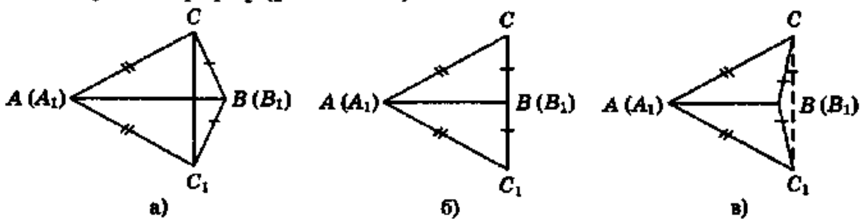


Рис. 60

Рассмотрим случай, когда луч C_1C проходит внутри угла $A_1C_1B_1$ (рис. 60 а).

1. Так как $A_1C_1 = AC$ по условию, то треугольник C_1A_1C — равнобедренный треугольник. По свойству углов при основании равнобедренного треугольника $\angle A_1C_1C = \angle A_1CC_1$.

2. Так как $B_1C_1 = BC$ по условию, то треугольник C_1B_1C — тоже равнобедренный треугольник. По свойству углов при основании равнобедренного треугольника $\angle B_1C_1C = \angle B_1CC_1$.

3. Так как $\angle A_1C_1B_1 = \angle B_1C_1C + \angle A_1C_1C$, а $\angle A_1CB_1 = \angle B_1CC_1 + \angle A_1CC_1$, то $\angle A_1C_1B_1 = \angle A_1CB_1$.

4. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$: $A_1C_1 = AC$ и $B_1C_1 = BC$ по условию, $\angle C_1 = \angle C$. Следовательно, $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Рассмотрим случай, когда луч C_1C является стороной угла $A_1C_1B_1$ (рис. 60 б).

1. Так как $A_1C_1 = AC$ по условию, то треугольник C_1A_1C — равнобедренный треугольник. По свойству углов при основании равнобедренного треугольника $\angle A_1C_1C = \angle A_1CC_1$.

2. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$: $A_1C_1 = AC$ и $B_1C_1 = BC$ по условию, $\angle C_1 = \angle C$. Следовательно, $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Рассмотрим случай, когда луч C_1C проходит вне угла $A_1C_1B_1$ (рис. 60 в).

1. Так как $A_1C_1 = AC$ по условию, то треугольник C_1A_1C — равнобедренный треугольник. По свойству углов при основании равнобедренного треугольника $\angle A_1C_1C = \angle A_1CC_1$.

2. Так как $B_1C_1 = BC$ по условию, то треугольник C_1B_1C — тоже равнобедренный треугольник. По свойству углов при основании равнобедренного треугольника $\angle B_1C_1C = \angle B_1CC_1$.

3. Так как $\angle A_1C_1B_1 = \angle A_1C_1C - \angle B_1C_1C$, а $\angle A_1CB_1 = \angle A_1CC_1 - \angle B_1CC_1$, то $\angle A_1C_1B_1 = \angle A_1CB_1$.

4. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$: $A_1C_1 = AC$ и $B_1C_1 = BC$ по условию, $\angle C_1 = \angle C$. Следовательно, $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

6°. Обучение применению *третьего признака равенства треугольников*, как и при изложении *первых двух признаков*, желательно начать с обучения школьников умению выделять три соответственно равных элемента данных треугольников по готовым чертежам. Для этого можно использовать плакаты такого типа, как на рисунке 61.

1. Определите, на каких рисунках есть равные треугольники.
2. Почему эти треугольники равны?

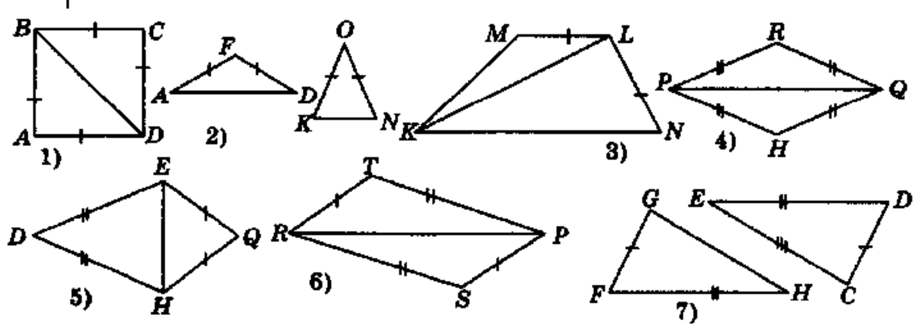


Рис. 61

После работы выполнить задания по готовому чертежу, используя упражнения **5–7** из дополнительных задач. Решение задачи 5 из дополнительных задач методического пособия (*По данным рисунка* 62 *докажите равенство треугольников BAC и DAC, если AB = AD, BC = DC*) целесообразно записать полностью в тетрадях учащихся, а остальные — решить устно.

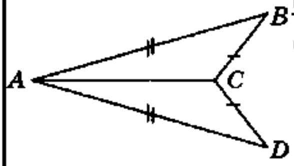


Рис. 62

Дано: $AB = AD$, $BC = DC$.

Доказать: $\Delta BAC = \Delta DAC$.

Решение:

Рассмотрим ΔBAC и ΔDAC. $AB = AD$ — *по условию*;

$BC = DC$ — *по условию*;

AC — *общая сторона*.

Следовательно, $\Delta BAC = \Delta DAC$ *по трем сторонам.*

И снова обратим внимание учащихся на то, что правильная, геометрически грамотная ссылка на *третий признак равенства треугольников* должна быть именно в такой форме: «*по трем сторонам*».

После решения задачи 5 из дополнительных задач методического пособия можно предложить задачу **136** из учебника, которая является развитием задачи **5** из дополнительных задач методического пособия.

> *Если в процессе обучения используется рабочая тетрадь, то следует предложить учащимся записать формулировку* ***третьего признака равенства треугольников.*** *А после доказательства теоремы выполнить задание* ***123****, которое является полным аналогом работы с плакатом. Затем предложить учащимся разобрать по тексту тетради решение задачи* ***124*** *(задача 5 из дополнительных задач) и по аналогии решить задачи* ***125*** *и* ***126****.*

7°. На третьем уроке провести самостоятельную работу по теме: «*Второй и третий признаки равенства треугольников*», первое задание которой с выбором ответа, второе со свободным ответом и третье с развернутым ответом.

Примерное планирование изучения материала

На первом уроке: в классе— изложить весь теоретический материал пункта 19; решить устно задачи **124**, **125** и **129** из учебника, задачи **1**, **2** и письменно задачу **3** из дополнительных задач методического пособия; дома — вопрос 14 из вопросов для повторения к главе II, решить задачи **121**, **122** и **126**.

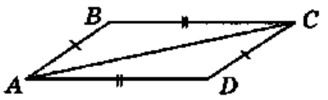
На втором уроке: в классе — изложить весь теоретический материал пункта 20; решить задачи **135** и **136** (все устно) из учебника, задачи 5 (письменно) и 8, 9 (устно) из дополнительных задач методического пособия; дома — вопрос 15 из вопросов для повторения к главе II, задачи **138**, **140** и **141**.

На третьем уроке: в классе — провести опрос по теме: *«Второй и третий признаки равенства треугольников»*, провести самостоятельную работу, решить задачи **128**, **132**, **134**; дома — задачи **133**, **139** и **142**.

Самостоятельная работа по теме: «Второй и третий признаки равенства треугольников»

Самостоятельная работа планируется на 15 мин.

1-й вариант



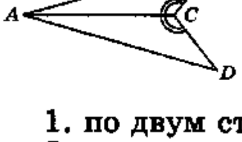
1. В треугольниках ABC и CDA: $AD = BC$, $AB = DC$. Определите, в силу какого признака равенства треугольников треугольники ABC и CDA равны.
   1. по двум сторонам и углу между ними;
   2. по стороне и прилежащим к ней углам;
   3. по трем сторонам;
   4. определить невозможно.

2. Треугольники ABC и KML равны, причем $\angle BAC = \angle LKM$ и $\angle ACB = \angle KLM$. Определите длину стороны MK, если $AB = 3$ см, $BC = 5$ см; $AC = 7$ см.

   Ответ: ______________________

3. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ стороны BC и B_1C_1 равны; $\angle ACB = \angle A_1C_1B_1$ и биссектрисы CD и C_1D_1 тоже равны. Определите, какая из сторон, AC или A_1C_1, больше.

2-й вариант



1. Отрезок AC принадлежит биссектрисе угла BAD. В треугольниках ABC и ADC: $\angle BCA = \angle DCA$. Определите, в силу какого признака равенства треугольников треугольники ABC и ADC равны.
   1. по двум сторонам и углу между ними;
   2. по стороне и прилежащим к ней углам;
   3. по трем сторонам.

2. Треугольники ABC и KML равны, причем $BA = KM$, $AC = KL$. Определите угол MKL, если $\angle ABC = 30°$, $\angle BCA = 50°$, $\angle CAB = 100°$.

Ответ: ______________________

3. В треугольниках ABC и MKP $AC = MP$, а также равны медианы, проведенные из вершин B и K соответственно. Определите, какая из сторон — BC или KP — больше.

Указания к задачам

При решении большинства задач к параграфу очень важно обратить внимание учащихся на правильное сопоставление соответствующих элементов равных треугольников. В задаче 127 после доказательств равенства треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, делая вывод о равенстве углов C и C_1, необходимо сделать ссылку на равенство сторон AB и A_1B_1 по условию задачи. Аналогично, в задаче 130 после доказательств равенства треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, делая вывод о равенстве сторон AB и A_1B_1, необходимо сделать ссылку на равенство углов C и C_1 по условию задачи. В задаче 128 из равенства треугольников ABC

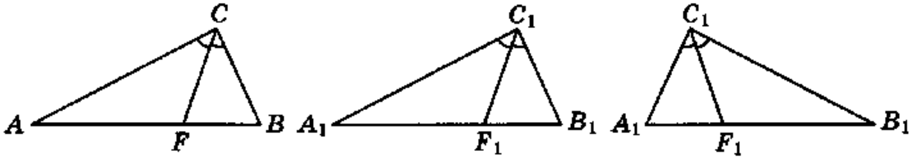


Рис. 63

и $A_1B_1C_1$ (рис. 63) нельзя сделать однозначный вывод о равенстве углов B и B_1 или углов A и A_1, поскольку неизвестно соответствие равных сторон. Однако это не влияет на ход решения задачи.

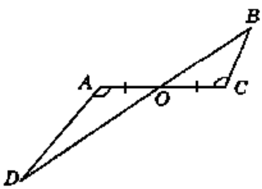


Рис. 64

Задачи 121 и 129 аналогичны. При решении задачи 129 очень важно подчеркнуть, что точка O является серединой только отрезка AC. При этом следует сделать рисунок, на котором треугольники BOA и DOC визуально заведомо не равны (рис. 64).

Результат решения задачи 132 может быть использован при решении задачи 133.

В задаче 134 дана формулировка второго признака равенства треугольников для равнобедренных треугольников, а в задаче 135 — формулировка третьего признака равенства треугольников для равносторонних треугольников.

Задачи 136 и 137 из учебника являются другой формулировкой задач 5 и 6 в списке дополнительных задач методических рекомендаций или задач 124 и 125 из рабочей тетради.

Дополнительные задачи

1. Докажите равенство треугольников BAC и DCA, если $\angle CAB = \angle ACD$ и $\angle CAD = \angle ACB$ (рис. 65).

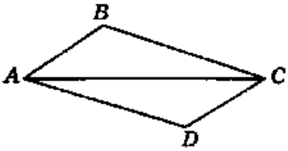


Рис. 65

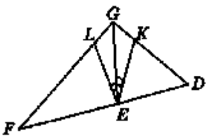


Рис. 66

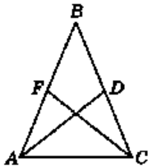


Рис. 67

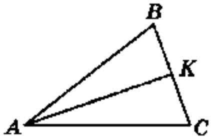


Рис. 68

2. В треугольнике FGD проведена биссектриса GE. Докажите равенство треугольников LEG и KEG, если $\angle LEG = \angle KEG$ (рис. 66).

3. Отрезки AD и CF — биссектрисы углов CAB и ACB соответственно, $\angle CAB = \angle ACB$. Докажите равенство треугольников ADC и CFA (рис. 67).

4. В треугольнике ABC: $AK \perp BC$, $\angle CAK = \angle BAK$ (рис. 68). Докажите, что $\Delta CAK = \Delta BAK$.

5. По рисунку 69 докажите равенство треугольников BAC и DAC, если $AB = AD$, $BC = DC$.

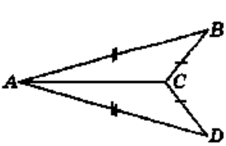


Рис. 69

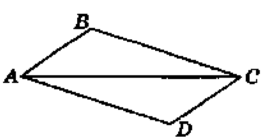


Рис. 70

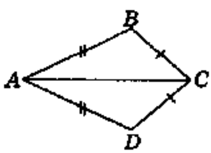


Рис. 71

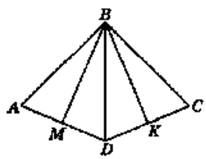


Рис. 72

6. Стороны AB и BC треугольника BAC соответственно равны сторонам CD и DA треугольника DCA. Определите градусную меру $\angle ABC$, если $\angle CDA = 127°$ (рис. 70).

7. Стороны AB и BC треугольника ABC соответственно равны сторонам AD и DC треугольника ADC (рис. 71). Докажите, что луч AC является биссектрисой угла BAD, а луч CA — биссектрисой угла BCD.

8. Треугольники ABD и DBC — равнобедренные с равными основаниями AD и CD (рис. 72). Докажите, что: а) $\Delta ABD = \Delta CBD$; б) медианы BM и BK этих треугольников равны.

9. Внутри равнобедренного треугольника ABC с основанием AC отмечена точка O так, что $AO = BO = CO$. Прямая BO пересекает сторону AC в точке D. а) Докажите, что отрезок BD является медианой, биссектрисой и высотой данного треугольника. б) Определите $\angle BAO$ и $\angle BCO$, если $\angle ABC = 80°$.

10. Внутри равностороннего треугольника ABC отмечена точка O так, что $AO = BO = CO$. Докажите, что $\Delta AOB = \Delta BOC = \Delta AOC$.

§4. Задачи на построение (2 ч)

Комментарий для учителя

Содержание параграфа составляет материал, традиционный для любого курса планиметрии.

С понятием окружности и ее элементов: радиус, хорда, диаметр, касательная — учащиеся уже встречались в курсе математики. Поэтому основное внимание учителю следует уделить отработке определения окружности и равенства радиусов одной окружности. Учащиеся должны свободно владеть этими понятиями, так как они активно используются при решении задач.

Кроме того, в параграфе рассматриваются задачи на построение. Когда говорят о задачах на построение, то если не оговорено специально, это значит, построение выполняется с помощью циркуля и линейки. С помощью линейки проводят прямую линию через две точки. Математическая линейка односторонняя и не имеет делений, поэтому, если отрезок задан линейным размером, необходимо его изобразить с помощью обычной линейки. Затем при откладывании отрезка его длину фиксировать с помощью циркуля. С помощью циркуля строят окружность с заданным центром и радиусом, при этом радиус может задаваться отрезком или двумя точками, расстояние между которыми равно длине радиуса. Если угол задан градусной мерой, то его следует построить с помощью транспортира, а при построении искомой фигуры использовать алгоритм построения угла, равного данному.

В параграфе рассматриваются четыре из пяти основных задач на построение с помощью циркуля и линейки: построение угла, равного данному; биссектрисы угла; прямой, перпендикулярной данной; деление отрезка пополам. Задачи на построение направлены на развитие пространственных представлений и конструктивного подхода к решению геометрических задач.

При изучении задач на построение с помощью циркуля и линейки будут рассматриваться построения отрезков, лучей, прямых, окружностей и их дуг и углов. Каждая из этих фигур однозначно может быть определена заданием конечного числа определяющих ее точек:

отрезок — его концами;

луч — начальной точкой и одной из его произвольных точек;

прямая — двумя ее произвольными точками;

окружность — центром и концами ее радиуса или центром и какой-нибудь ее точкой;

дуга окружности — ее концами и центром;

угол — вершиной и парой произвольных точек на его сторонах.

Так как определяющие точки каждой фигуры задают ее однозначно, то решение любой задачи на построение сводится к построению определяющих точек искомой фигуры.

При решении задач на построение с помощью циркуля и линейки определяющие точки искомой фигуры могут быть получены как точки пересечения двух прямых, двух окружностей или прямой и окружности. Поэтому отыскание условий существования решения задачи сводится, как правило, к отысканию условий пересечения двух прямых, двух окружностей, прямой и окружности, пересечением которых являются искомые определяющие точки фигуры. А при определении числа решений задачи в общем случае следует исходить из того, что две прямые пересекаются в одной точке; две окружности — в двух точках; прямая и окружность — в двух точках.

Текущие результаты изучения параграфа 4. Учащиеся должны:

– распознавать на чертежах и изображать на чертежах и рисунках: окружность и ее элементы;

– выделять в конфигурации, данной в условии задачи: окружность и ее элементы;

– объяснять понятие «построение с помощью циркуля и линейки»;

– иллюстрировать и объяснять основные алгоритмы построения с помощью циркуля и линейки: построение угла, равного данному; биссектрисы угла; прямой, перпендикулярной данной; деление отрезка пополам;

– применять при решении задач на вычисления и доказательство определения окружности и ее элементов;

– применять при решении задач на построение основные алгоритмы построения с помощью циркуля и линейки.

Методические рекомендации к изучению материала

1°. *Понятия* окружности, ее радиуса, диаметра, хорды и центра уже знакомы учащимся из курса математики. С целью повторения и закрепления введенных понятий можно предложить учащимся следующие устные задачи и вопросы по готовому чертежу (рис. 73):

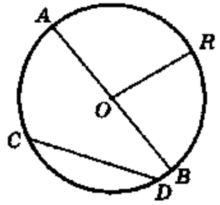


Рис. 73

1) Назовите центр окружности.

2) Назовите радиус окружности.

3) Назовите диаметр окружности.

4) Радиус окружности равен 7 см. Чему равен диаметр этой окружности?

5) Диаметр окружности равен 25 см. Чему равен ее радиус?

6) Назовите хорду окружности.

В определении окружности основное внимание следует уделить тому факту, что *все радиусы одной окружности равны*. Учащиеся должны свободно владеть этим фактом, так как он активно используется при решении задач. Для его закрепления можно предложить учащимся по готовым чертежам устные задачи 1–4 из дополнительных задач методического пособия. При наличии времени и чтобы подчеркнуть принципиальное отличие окружности от прямой полезно предложить учащимся устно выполнить задачи 7 и 8 из дополнительных задач методического пособия.

*При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся выполнить задание **129**, которое является аналогом работы с рисунком **77**. На прямое закрепление выполнить задания **130–133**. Задания **130**, **131** и **136** полностью совпадают с заданиями **1**, **2** и **9** из дополнительных задач методического пособия.*

*Учащиеся смогут полнее отработать свойство окружности (**все радиусы одной окружности равны**) в ходе выполнения задания **132** и решения задачи **133**. При этом на их решение будет затрачено значительно меньше времени. Кроме того, у учащихся останутся чертежи и условия тех задач, которые решались устно.*

2°. Задачи на построение направлены на развитие пространственных представлений и конструктивного подхода к решению геометрических задач. В традиционных курсах геометрии принято задачи: *построение треугольника по трем сторонам; угла, равного данному; биссектрисы угла; прямой, перпендикулярной данной; деление отрезка пополам* — называть основными задачами на построение. Четыре из пяти основных задач на построение рассматриваются в данном параграфе.

1. Построение с помощью циркуля и линейки угла, равного данному.

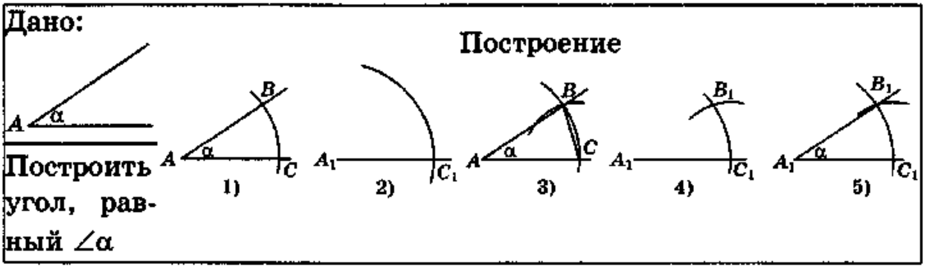


Рис. 74

Описание построения

Построим окружность произвольного радиуса с центром в вершине данного угла A. Пусть B и C — точки пересечения этой окружности со сторонами угла (рис. **74, 1**). *Радиусом AC проведем окружность с центром в точке A_1 — начальной точке луча l и точку пересечения луча и окружности обозначим C_1* (рис. **74, 2**). *Радиусом CB* (рис. **74, 3**) *проведем окружность с центром в точке C_1 и точку пересечения двух окружностей обозначим B_1* (рис. **74, 4**). *Проведем луч A_1B_1* (рис. **74, 5**). *Получили $\angle B_1A_1C_1$, равный данному. Равенство углов следует из равенства треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.*

2. Построение с помощью циркуля и линейки биссектрисы угла.

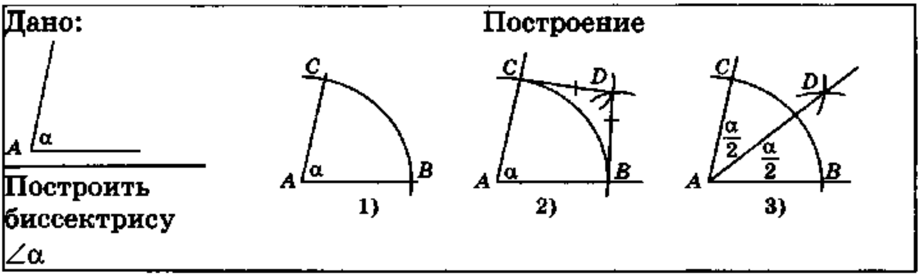


Рис. 75

Описание построения

Построим окружность произвольного радиуса с центром в вершине данного угла A. Пусть B и C — точки пересечения этой окружности со сторонами угла (рис. **75**, **1**). *Из точек B и C тем же радиусом проведем окружности и точку пересечения этих двух окружностей обозначим D* (рис. **75**, **2**). *Проведем луч AD. Луч AD является биссектрисой ∠A, что следует из равенства треугольников CAD и BAD* (рис. **75**, **3**).

3. Построение с помощью циркуля и линейки прямой, перпендикулярной данной.

При построении перпендикулярных прямых возможны два варианта:

1. Через данную точку C, лежащую на прямой n, провести прямую, перпендикулярную данной прямой n.
2. Через данную точку C, не лежащую на прямой n, провести прямую, перпендикулярную данной прямой n.

Решение второй задачи дано в учебнике, как решение задачи **153**.

Рис. 76

Описание построения

Построим окружность произвольного радиуса с центром в точке C. Пусть B и A — точки пересечения этой окружности с прямой n (рис. **76**, **2**). *Из точек B и A радиусом AB проведем окружности и точку пересечения этих двух окружностей обо-*

значим O. (рис. **76, 3**). *Проведем прямую CO* (рис. **76, 4**). *Перпендикулярность прямых CO и n следует из равенства треугольников AOC и BOC.*

Дано: $C \notin n$

Построить прямую, перпендикулярную прямой n.

Построение (задача 2)

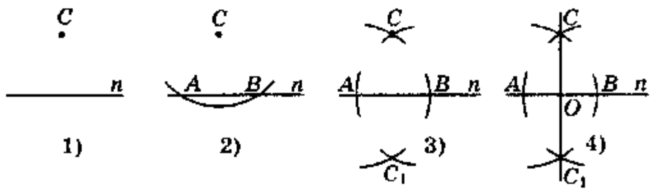


Рис. 77

Описание построения

Построим окружность произвольного радиуса с центром в точке C, пересекающую прямую n Пусть B и A — точки пересечения этой окружности с прямой n. (рис. **77, 2**). *Из точек B и A тем же радиусом проведем окружности и точки пересечения этих двух окружностей обозначим C_1 и C* (рис. **77, 3**). *Проведем прямую C_1C* (рис. **77, 4**).

Докажем перпендикулярность прямых C_1C и n. Точку пересечения прямых C_1C и n обозначим O. Треугольники ACB и AC_1B равны по третьему признаку равенства треугольников. Поэтому $\angle CAO = \angle C_1AO$. Тогда треугольники CAO и C_1AO равны по первому признаку равенства треугольников. Отсюда следует, что углы COA и C_1OA равны. А так как они смежные, то они прямые. Следовательно, CO — перпендикуляр, опущенный из точки C на прямую n.

4. Деление отрезка пополам с помощью циркуля и линейки.

Дано: Отрезок AB

Построить точку O так, что $AO = OB$

Построение

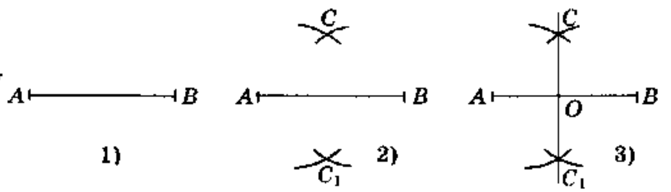


Рис. 78

Описание построения

Из точек B и A радиусом AB проведем окружности и точки пересечения этих двух окружностей обозначим C_1 и C (рис. **78, 2**). *Проведем прямую C_1C. Точку пересечения прямых C_1C и n обозначим O* (рис. **78, 3**).

Докажем, что точка O является серединой отрезка AB. Треугольники C_1AC и C_1BC равны по третьему признаку равенства треугольников. Поэтому $\angle ACO = \angle BCO$. Тогда треугольники ACO и BCO равны по первому признаку равенства треугольников. Отсюда следует, что стороны AO и BO равны. Следовательно, O является серединой отрезка AB.

3°. Традиционно решение задач на построение плохо усваивается учащимися. Поэтому второй урок рекомендуется посвятить решению задач на построение. Для этого полезно использовать задачи из раздела «Дополнительные задачи» как учебника, так и данного пособия для учителя.

Примерное планирование изучения материала

На первом уроке: в классе — изложить весь теоретический материал параграфа 4; решить устно задачи 1–4 из дополнительных задач методического пособия; дома — вопросы 16–20 из вопросов для повторения к главе II, решить задачи **145**, **146** и **147**.

На втором уроке: в классе — провести опрос по решению четырех основных задач на построение; разобрать по тексту учебника задачу **153** и решить задачи **148**, **150** и **152** из учебника; дома — решить задачи **149**, **151**, **154** и **155**.

Указания к задачам

Задача **149** не имеет решения, когда отрезок *PQ* меньше длины перпендикуляра, проведенного из точки *B* к прямой *a*. Задача имеет два решения, когда отрезок *PQ* больше длины перпендикуляра, проведенного из точки *B* к прямой *a*. Задача имеет одно решение, когда отрезок *PQ* равен длине перпендикуляра, проведенного из точки *B* к прямой *a* (рис. **79**).

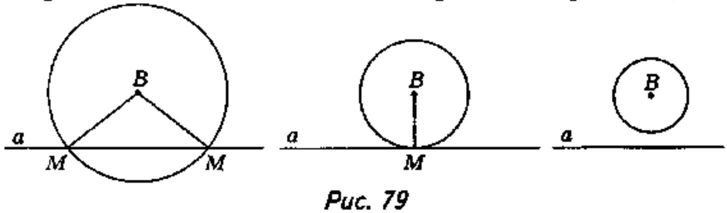


Рис. 79

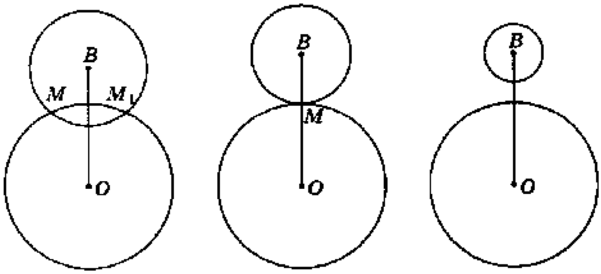


Рис. 80

Решение задачи 150 аналогично решению задачи 149 и хорошо видно из рисунка 80.

Задача 151. От луча XY отложить угол YXV, равный углу BAC, а затем от луча XV отложить угол XVZ, равный углу BAC. Полученный угол YXZ — искомый.

Задача 152. Построить биссектрису угла AOB и продлить ее за точку O.

Дополнительные задачи

1. Дана окружность с центром в точке O. По данным рисунка 81 определите вид треугольника BOA.

2. Дана окружность с центром в точке O. Хорда AB равна радиусу. Определите вид треугольника BOA и найдите его углы (рис. 82).

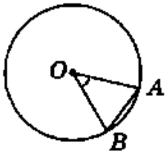


Рис. 81

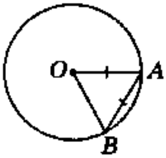


Рис. 82

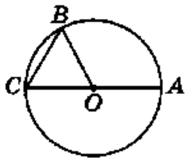


Рис. 83

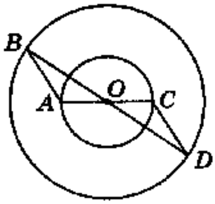


Рис. 84

3. Радиус окружности с центром в точке O равен 7 см, $\angle BOC = 60°$. Найдите хорду CB. (рис. 82).

4. В окружности с центром в точке O проведен диаметр AC. Определите углы треугольника BOC, если $\angle AOB = 120°$ (рис. 83).

5. Отрезки AB и CD являются диаметрами окружности с центром в точке O. Докажите, что хорды AC и BD равны.

6. Две окружности с центрами O и O_1 пересекаются в точках A и B. Докажите, что $\Delta OAO_1 = \Delta OBO_1$.

7. Имеет ли смысл понятие «*между*» для трех точек, расположенных на окружности?

8. В велогонках на одном из этапов выступают три велосипедиста в желтой, красной и голубой майках. «Я иду первым», — гордо заявляет велосипедист в

красной майке. «Хорошо, что я не последний», — скромно говорит велосипедист в желтой майке. «Я обогнал велосипедиста в красной майке», — утверждает велосипедист в голубой майке. Как это можно объяснить?

9. Даны две окружности с общим центром в точке O, AC и BD — диаметры этих окружностей. Докажите, что $\Delta ABO = \Delta CDO$ (рис. 84).

10. Разделите угол, равный **135°**, на три равные части с помощью циркуля и линейки.

Указание. Из вершины угла восстановить к одной из сторон угла перпендикуляр, а затем провести биссектрису прямого угла.

Систематизация и обобщение знаний по теме «Треугольники»

Комментарий для учителя

1°. В результате систематизации и обобщения знаний по теме «Треугольники» учащиеся должны:

– распознавать и изображать на чертежах равнобедренные треугольники, равносторонние треугольники; высоты, медианы и биссектрисы треугольника, окружности и ее элементы;

– выделять из данной конфигурации заданные в условии задания фигуры и элементы фигур;

– применять при решении задач на вычисления и доказательство:

- определения равнобедренного и равностороннего треугольников; высоты, медианы и биссектрисы треугольника; окружности и ее элементов;
- признаки равенства треугольников, теоремы о свойствах равнобедренного треугольника.

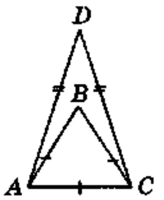
2°. При подготовке к контрольной работе можно подобрать задачи из разделов «Дополнительные задачи» учебника и методического пособия в зависимости от уровня подготовки класса. Домашнее задание можно также сформировать из «Дополнительных задач» учебника.

Из сборника тестов «Геометрия. Тесты 7 класс» к учебнику Л.С. Атанасяна и др. издательства «Просвещение» предложить учащимся выполнить тесты 4 и 5, рекомендованные для главы 2 «Треугольники» и направленные на оперативную проверку основных умений, формируемых при изучении этой темы. Поскольку каждый тест имеет четыре варианта, то можно просто использовать все восемь вариантов или создать из них один тест, используя часть заданий из каждого теста. Первый вариант более приемлемый, так как при разборе заданий позволяет более глубоко и всесторонне систематизировать пройденный материал. Разобрать решения заданий следует сразу после выполнения тестов с активным привлечением учащихся. При этом рекомендуется обратить внимание на задание 1 варианта 3 теста 5, которое позволяет обсудить с учащимся тему: отрицательный результат — тоже результат.

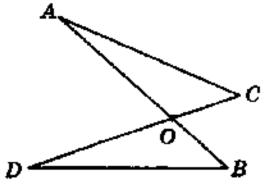
3'. В контрольной работе первые три задачи — это задачи с выбором ответа и со свободным ответом. Надо напомнить учащимся, что делать запись при решении этих задач не следует. В задачах 4–5 решение записывается полностью с записью условия и выполнением чертежа.

Контрольная работа по теме: «Треугольники»

1-й вариант



1. Равносторонний и равнобедренный треугольники имеют общее основание. Периметр равностороннего треугольника равен 36 см, а периметр равнобедренного равен 40 см. Найдите боковую сторону равнобедренного треугольника.
   Ответ: ____________________



2. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O, при этом $OA = OD$ и $OC = OB$. Найдите угол CAO, если $\angle ODB = 33°$, $\angle OBD = 54°$.
   1. 21°; 2. 33°; 3. 54°; 4. 88°.

3. **Определите, сколько решений имеет следующая задача. Решать задачу не надо.**

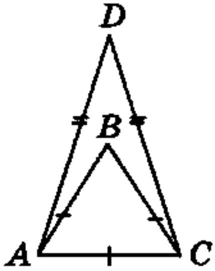
Периметр равнобедренного треугольника равен* 18 *см. Одна из его сторон равна* 6 *см. Найдите длины двух других сторон.

1. *одно*; 2. *два*; 3. *три*; 4. *решений нет.*

4. **В треугольнике *ABC* биссектриса *AD* является высотой треугольника. Найдите периметр треугольника *ABC*, если периметр треугольника *ABD* равен 14 см, а биссектриса *AD* равна 3 см.**

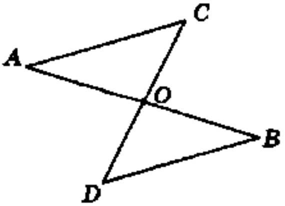
5. **Докажите, что если три окружности имеют общую хорду, то их центры лежат на одной прямой.**

2-й вариант



1. **Равносторонний и равнобедренный треугольники имеют общее основание. Периметр равнобедренного треугольника равен 40 см, а боковая сторона равна 14 см. Найдите сторону равностороннего треугольника.**

Ответ: ______________________



2. **Отрезки *AB* и *CD* пересекаются в точке *O*, при этом делятся пополам. Найдите угол *CAO*, если $\angle ODB = 63°$, $\angle OBD = 47°$.**

1. 110°; 2. 63°; 3. 47°; 4. 16°.

3. Определите, сколько решений имеет следующая задача. Решать задачу не надо.

В равнобедренном треугольнике стороны равны 8 см и 5 см. Найдите периметр треугольника.

1. *одно*; 2. *два*; 3. *три*; 4. *решений нет*.

4. В треугольнике *ABC* высота *AD* является медианой треугольника. Найдите периметр треугольника *ABC*, если периметр треугольника *ADB* равен 15 см, а высота *AD* равна 4 см.

5. Докажите, что середины равных хорд окружности расположены на окружности с тем же центром.

ГЛАВА III. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ (8 ч)

Комментарий для учителя

Основное содержание данной главы составляют аксиома о параллельных прямых, признаки параллельности прямых и свойства углов при параллельных прямых и секущей. Вместе с признаками равенства треугольников и теоремой о сумме углов треугольника эти вопросы являются базовыми для курса планиметрии.

Отличием данного курса от традиционного изложения темы является отсутствие разделения углов, образованных при пересечении двух прямых секущей, на внутренние и внешние.

В данном курсе углы, образованные при пересечении двух прямых секущей, вводятся на наглядном уровне. Поэтому можно порекомендовать при введении понятий углов, образованных при пересечении двух прямых секущей, отработать на наглядном уровне и использовать на уровне распознавания углов по рисунку в решении большинства задач.

Теоремы, рассмотренные в параграфе, дают возможность расширить круг задач, связанных с вычислениями. И такие задачи в данной теме составляют большую долю, чем в предыдущей, где основную массу составляли задачи на доказательство. Однако следует иметь в виду, что и при решении вычислительных задач от учащихся требуется умение проводить доказательные рассуждения.

В этой главе продолжается знакомство учащихся с понятийной терминологией математики, в данном случае геометрии.

Рассматриваемый в этом параграфе способ доказательства от противного — один из часто употребляемых в геометрии способов дедуктивных рассуждений.

Планируемые итоговые результаты изучения третьей главы:

Учащиеся должны научиться:

– распознавать на чертежах и изображать на чертежах и рисунках: односторонние, накрест лежащие и соответственные углы;

– описывать ситуацию, изображенную на рисунке, и, наоборот, по описанию ситуации выполнять рисунок;

– выделять в конфигурации, данной в условии задачи: параллельные прямые, односторонние, накрест лежащие и соответственные углы;

– формулировать, иллюстрировать и доказывать формулировки: признаков параллельности прямых, свойства углов, образованных при пересечении параллельных прямых секущей;

– объяснять термины *«теорема, обратная данной»*, *«аксиома»*, *«следствие»*, *«условия и заключения теоремы»*;

– объяснять сущность *метода от противного*;

– применять при решении задач на вычисления и доказательство:

- определения односторонних, накрест лежащих и соответственных углов;
- признаки параллельности прямых, свойства углов, образованных при пересечении параллельных прямых секущей;
- применять *метод доказательства от противного*.

§1. Признаки параллельности двух прямых (1 ч)

Комментарий для учителя

Текущие результаты изучения параграфа 1. Учащиеся должны:

– *изображать, обозначать и распознавать* на чертежах и рисунках односторонние, внутренние накрест лежащие и соответственные углы;

– *формулировать и объяснять формулировки*: признаков параллельности прямых;

– *доказывать* признаки параллельности прямых;

– объяснять термин *«секущая»*;

– *решать* задачи, применяя признаки параллельности прямых и понятия об односторонних, накрест лежащих и соответственных углах.

Методические рекомендации к изучению материала

1°. Понятие *«параллельные прямые»* не является для учащихся новым, оно известно им из курса математики. В учебнике напоминается практический способ построения параллельных прямых с помощью угольника и линейки.

2°. *Углы, образованные при пересечении двух прямых секущей*, вводятся без определений, только на наглядном уровне.

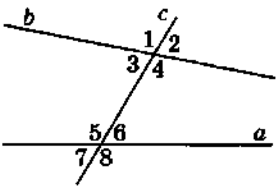


Рис. 85

При этом вначале по рисунку **85** полезно произвести следующую запись:

1. *накрест лежащие углы*: $\angle 1$ и $\angle 8$; $\angle 2$ и $\angle 7$; $\angle 3$ и $\angle 6$; $\angle 4$ и $\angle 5$;

2. *односторонние углы*: $\angle 3$ и $\angle 5$; $\angle 4$ и $\angle 6$; $\angle 1$ и $\angle 7$; $\angle 2$ и $\angle 8$;

3. *соответственные углы*: $\angle 1$ и $\angle 5$; $\angle 2$ и $\angle 6$; $\angle 3$ и $\angle 7$; $\angle 4$ и $\angle 8$.

После введения *углов, образованных при пересечении двух прямых секущей*, их необходимо отрабатывать на наглядном уровне и использовать при решении задач на уровне распознавания по рисунку. Поэтому достаточно провести их закрепление по рисунку **85** с помощью вопросов:

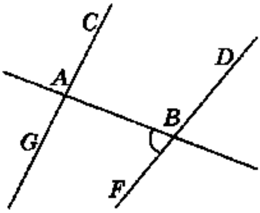


Рис. 86

1. Назовите пару *односторонних* углов.
2. Назовите угол, который образует с углом *CAB* пару *односторонних* углов.
3. Назовите пару *накрест лежащих* углов.
4. Назовите угол, который образует с углом *CAB* пару накрест лежащих углов.
5. Назовите все пары *соответственных* углов.

6. На рисунке **86** назовите угол, который образует с углом *ABF*:

а) пару *односторонних* углов;

б) пару *накрест лежащих* углов;

в) пару *соответственных* углов.

Необходимо требовать, чтобы учащиеся давали полные ответы на поставленные вопросы, не забывая указывать, при каких прямых и какой секущей рассматриваются углы. Например, при ответе на вопрос: «*По данным рисунка* **86** *назовите пару односторонних углов*», — должен быть дан ответ: «*На рисунке 86 углы CAB и ABD являются односторонними при прямых GC и FD и секущей AB*».

При введении углов, образующихся при пересечении двух прямых и секущей, следует подчеркнуть, что названия этих углов относятся не к каждому отдельному углу, а, как и в случае смежных и вертикальных углов, к парам углов.

В рабочей тетради на закрепление понятий углов, образующихся при пересечении двух прямых и секущей, можно предложить учащимся выполнить задание 140, которое аналогично приведенным выше упражнениям.

3°. При обсуждении условия теоремы *«Если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны»* полезно сначала выполнить чертеж, отвечающий условию (рис. 87), и кратко записать условие и заключение теоремы:

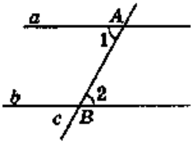


Рис. 87

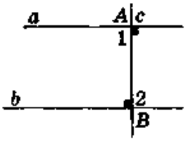


Рис. 88

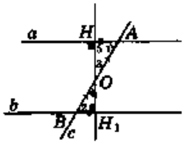


Рис. 89

Дано: a и b — *прямые*;
c — *секущая*;
$\angle 1 = \angle 2$ (рис. 87).

Доказать: $a \parallel b$.

Затем заметим, что если равные углы 1 и 2 — прямые, то по теореме о *двух прямых, перпендикулярных к третьей*, прямые a и b — параллельны (рис. 88).

Рассмотрим случай, когда равные углы 1 и 2 не прямые.

При доказательстве воспользуемся таким приемом, как *дополнительное построение*.

Для того чтобы учащиеся лучше запомнили доказательство, усвоили его основные идеи, полезно записать его на доске:

1) Точка O середина отрезка AB, т.е. $AO = OB$ (рис. 89).

2) Из точки O проведем перпендикуляр OH к прямой a, $OH \perp a$ (рис. 89).

3) На прямой b от точки B отложим отрезок BH_1, равный AH, $BH_1 = AH$ по построению.

4) $\angle 1 = \angle 2$ по условию.

5) Соединим точки H_1 и O. $\Delta AHO = \Delta BH_1O$ по двум сторонам ($AO = OB$, $BH_1 = AH$) и углу между ними ($\angle 1 = \angle 2$).

6) Из равенства треугольников следует, что $\angle 3 = \angle 4$ как лежащие против равных сторон AH и BH_1.

7) Из равенства $\angle 3 = \angle 4$ следует, что точки H_1, O и H лежат на одной прямой.

8) Из равенства треугольников следует, что $\angle 5 = \angle 6$ как лежащие против равных сторон AO и OB.

9) Из равенства $\angle 5 = \angle 6$ следует, что $\angle 6$ — прямой, так как $\angle 5$ — прямой по построению.

10) Отсюда, прямые a и b перпендикулярны прямой HH_1. Значит, по теореме *о двух прямых, перпендикулярных к третьей*, прямые a и b — параллельны.

4°. Доказательства двух других признаков параллельности: *«Если при пересечении двух прямых секущей сумма односторонних углов равна* 180°, *то прямые параллельны»* и *«Если при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны, то прямые параллельны»* — просты. Поэтому можно порекомендовать провести их в форме беседы.

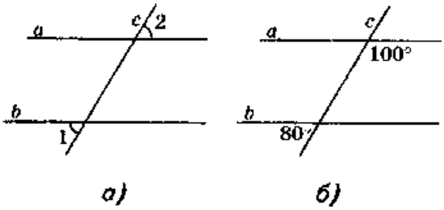


Рис. 90

5'. В качестве упражнений на закрепление доказанных признаков можно использовать следующее задание:

Используя данные рисунков (рис. **90** а, б), докажите, что прямые *a* и *b* параллельны.

После выполнения задания по готовому чертежу решить задачи **187** и **192**. Задачу **187** можно решить устно, используя чертежи, данные в учебнике, но лучше записать ее решение в тетради.

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует записать формулировки ***признаков параллельности прямых****. Затем на прямое закрепление выполнить задания* ***191–193****. Задача* ***187*** *из учебника дана в рабочей тетради под номером* ***150****. На данном этапе изучения геометрии задачи* ***187*** *из учебника и* ***2*** *из дополнительных задач методических рекомендаций являются задачами повышенного уровня сложности, но в конце изучения курса геометрии седьмого класса они станут задачами обязательного уровня подготовки учащихся.*

6'. Предлагаемое ниже планирование предполагает, что на изучение данного параграфа отводится один урок. Дело в том, что в параграфе 2 будут доказаны теоремы о свойствах *углов, образующихся при пересечении двух параллельных прямых и секущей*. Как известно, *признаки параллельности прямых* и теоремы *о свойствах углов, образующихся при пересечении двух параллельных прямых и секущей*, являются обратными теоремами. Поэтому проверку усвоения учащимися доказательств *признаков параллельности прямых* и теорем *о свойствах углов, образующихся при пересечении двух параллельных прямых и секущей*, естественнее проводить вместе после изучения *свойств углов, образующихся при пересечении двух параллельных прямых и секущей*, во втором параграфе. Учащимся обязательно нужно сообщить, на каком уроке будет проведена проверка умения доказывать *признаки параллельности прямых* и теоремы *о свойствах углов, образующихся при пересечении двух параллельных прямых и секущей*.

Примерное планирование изучения материала

В классе — изложить весь теоретический материал параграфа 1; решить задачи **187** и **192**; дома — вопросы 1–6 из вопросов для повторения к главе III, задачи **188, 189, 193** и **194.**

Дополнительные задачи

1. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O. Назовите внутренние накрест лежащие углы:
   а) при прямых AC и BD и секущей CD;
   б) при прямых AC и BD и секущей AB;
   в) при прямых AD и BC и секущей CD;
   г) при прямых AD и BC и секущей AB.

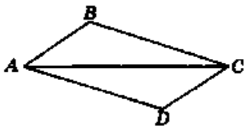


Рис. 91

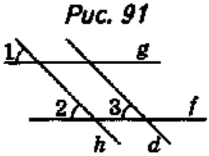


Рис. 92

2. Докажите, что $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$, если $AB = CD$ и $BC = AD$ (рис. 91).

3. Докажите, что $d \parallel h$ и $g \parallel f$, если $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$ (рис. 92).

4. В треугольниках ABC и ABC_1 проведены высоты CD и C_1D_1. Докажите, что прямые CD и C_1D_1 параллельны или совпадают.

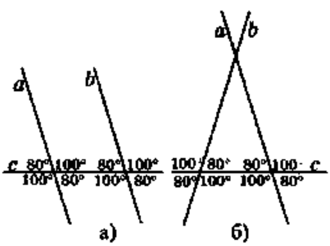


Рис. 93

5. При пересечении двух прямых a и b третьей прямой c образуются восемь углов. Четыре из них равны 80°, другие четыре — 100°. Следует ли отсюда, что прямые a и b параллельны?

Решение. Нет, не следует. Прямые a и b могут быть параллельными (рис. 93 а). А могут образовывать равнобедренный треугольник, боковые стороны которого лежат на прямых a и b, а основание лежит на прямой c (рис. 93 б).

§2. Аксиома параллельных прямых (3 ч)

Комментарий для учителя

В этом параграфе продолжается знакомство учащихся с понятийной терминологией математики, в данном случае геометрии. Понятия *«теорема»* и *«определение»* были введены и получили объяснение во второй главе в пунктах 14 и 21. В данной главе в пункте 27 вводятся понятия *«аксиома»*, *«след-*

ствие», а в пункте 29 вводятся понятие *«теоремы обратной данной»* и термины *«условия и заключения теоремы»*. Кроме того, здесь же, в пункте 29, после доказательства теоремы о свойстве накрест лежащих углов при *параллельных прямых* вводится название метода, примененного при доказательстве, и объясняется его суть.

Текущие результаты изучения параграфа 2. Учащиеся должны:

– формулировать и объяснять *аксиому параллельных прямых*;

– формулировать и доказывать следствия из аксиомы *параллельных прямых*;

– формулировать, иллюстрировать и доказывать: признаки параллельности прямых, свойства углов, образованных при пересечении параллельных прямых секущей;

– формулировать и доказывать теоремы о свойствах углов при параллельных из аксиомы *параллельных прямых*;

– объяснять термины *«аксиома»*, *«следствие»* и приводить примеры аксиом и следствий;

– решать задачи с использованием:

- аксиомы параллельных прямых,
- следствий из аксиомы параллельных прямых,
- теоремы о свойствах углов, образованных при пересечении параллельных прямых секущей;

– применять метод доказательства от противного.

Методические рекомендации к изучению материала

1°. Изучение материала пунктов 27 и 28 можно рекомендовать провести по следующему плану:

1. Ввести понятие *аксиомы*, провести небольшую беседу об истории пятого постулата Евклида, используя материал учебника и дополняя его.
2. Систематизировать известные аксиомы.
3. Напомнить учащимся, что называют *определением* (глава II, §4, пункт 21), *теоремой* и *доказательством* теоремы (глава II, §1, пункт 15), ввести понятие *следствия*.
4. В качестве примеров рассмотреть доказательства следствий из *аксиомы параллельных прямых*.

2°. Проводя систематизацию аксиом, полезно в виде рисунков зафиксировать их на доске (рис. 94):

1. Через любые две точки можно провести прямую, и притом только одну (рис. **94 а**).
2. На любом луче от его начальной точки можно отложить отрезок, равный данному, и притом только один (рис. **94 б**).
3. От любого луча в заданную сторону можно отложить угол, равный данному, и притом только один (рис. **94 в**).
4. Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной (рис. **94 г**).

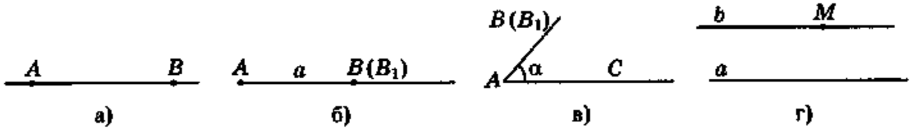


Рис. 94

3°. Напомнив учащимся, что называют *определением*, *теоремой* и *доказательством* теоремы, необходимо привести примеры:

Определение:

Две прямые на плоскости называются параллельными, если они не пересекаются.

Теорема.

Если при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны, то прямые параллельны.

Для приведения примеров можно и даже нужно привлечь учащихся, так как это будет способствовать воспроизведению изученного материала и более успешному усвоению нового.

Понятие следствия: *«Следствием из данной теоремы называют такое утверждение, которое доказывается со ссылкой только на данную теорему»* — лучше ввести после доказательства первого следствия из аксиомы о параллельных прямых.

Так как доказательства следствий из *аксиомы параллельных прямых* достаточно простые, то их можно провести с включением учащихся во фронтальную работу. Эти следствия практически являются задачами на закрепление *аксиомы параллельных прямых*.

Изучение первого и второго следствий проводится по одной схеме. Начинается с формулировок:

Если прямая пересекает одну из параллельных прямых, то она пересекает и другую.

Если две прямые параллельны третьей, то они параллельны.

Затем делаются рисунки 95 и 96 и краткая запись условия и заключения.

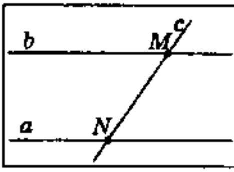
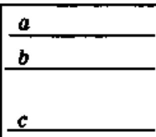
	Дано: $a \| b$ (рис. 95). $M \in b$, $M \in c$ Доказать: $N \in a$, $N \in c$.		Дано: $a \| c$, $b \| c$ (рис. 96). Доказать: $a \| b$

Рис. 95 Рис. 96

Доказательство обоих следствий неявно проводится *методом от противного*. Однако обсуждение этого метода по авторской версии должно произойти после теоремы о свойстве *накрест лежащих углов при параллельных прямых*. Для наглядности во втором следствии полезно выполнить еще один чертеж (рис. 97), который явно подсказывает применение аксиомы параллельных прямых.

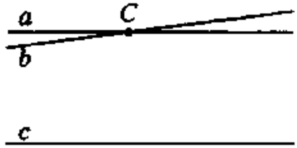


Рис. 97

4°. Возможен и другой вариант изложения этого фрагмента. Предложить учащимся разобрать доказательства следствий по учебнику.

5°. В качестве упражнений на закрепление материала пункта 28 решить задачи 197, 198 и 199.

Поскольку на следующем уроке будут рассматриваться свойства углов при *параллельных прямых*, то можно предложить решить задачи 186 в) и 190.

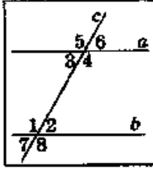
При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует записать формулировки ***аксиомы параллельных прямых*** *и следствия из аксиомы. Затем на прямое закрепление второго следствия из аксиомы выполнить задание 144.*

6°. Изучение теорем о свойствах углов, образованных при пересечении параллельных прямых секущей, проводится как минимум через урок после изучения признаков параллельности прямых. Поэтому, приступая к формулировке свойств углов, образованных при пересечении параллельных прямых секущей, полезно вспомнить с учащимися формулировки признаков параллельности прямых, сделать чертеж (рис. 98) и краткую запись условия и заключения теорем:

Если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.

Если при пересечении двух прямых секущей сумма односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны.

Если при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны, то прямые параллельны.



Дано: *a и b — прямые;* *c — секущая;* $\angle 1 = \angle 4$.	Дано: *a и b — прямые;* *c — секущая;* $\angle 2 + \angle 4 = 180°$.	Дано: *a и b — прямые;* *c — секущая;* $\angle 2 = \angle 6$.
Доказать: $a \parallel b$.	Доказать: $a \parallel b$.	Доказать: $a \parallel b$.

Рис. 98

При выполнении краткой записи условия и заключения теоремы объяснить, что является условием, а что заключением теоремы. Уделять этому объяснению много времени не стоит, ибо учащиеся уже давно понимают смысл условия и заключения теоремы на уровне, что дано и что требуется доказать.

7°. Затем перейти к рассмотрению теоремы: *«Если две параллельные прямые пересечены секущей, то накрест лежащие углы равны»*.

Доказательство теоремы о *свойстве накрест лежащих углов при параллельных прямых* проводится *методом от противного*. Так как после доказательства теоремы будет рассматриваться сущность *метода от противного*, очень полезно все шаги доказательства записать на доске.

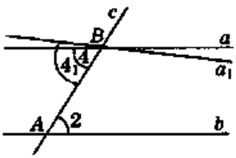


Рис. 99

Дано: *a* и *b — прямые;*
c — секущая;
$a \parallel b$

Доказать: $\angle 2 = \angle 4$

Доказательство.

1. Предположим, что *накрест лежащие углы* $\angle 2$ и $\angle 4$ не равны.

2. Отложим от луча *BA* угол 4_1, равный $\angle 2$, так, чтобы углы $\angle 2$ и $\angle 4_1$ были накрест лежащими при прямых a_1 и b и секущей c (рис. 99).

3. Так как по построению $\angle 2 = \angle 4_1$, то $a_1 \parallel b$ (признак *параллельности прямых*).

4. По условию $a \parallel b$, что невозможно.

5. Через точку *B* проходят прямая $a \parallel b$ и прямая $a_1 \parallel b$, что невозможно.

6. Прямая a совпадает с прямой a_1 по аксиоме *параллельных прямых*.

7. Отсюда, $\angle 2 = \angle 4$ (*накрест лежащие углы*, образованные секущей и параллельными прямыми a и b, равны).

8°. Понятия *прямой* и *обратной теорем* вводятся на основе сделанных записей условий *признака параллельных прямых* и *свойства накрест лежащих углов при параллельных прямых и секущей* (рис. 100).

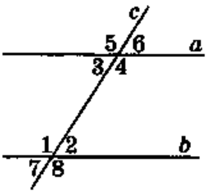


Рис. 100

Прямая:	Обратная:
Если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.	*Если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то накрест лежащие углы равны.*
Дано: a и b — *прямые*; c — *секущая*; $\angle 1 = \angle 4$	Дано: a и b — *прямые*; c — *секущая*; $a \parallel b$
Доказать: $a \parallel b$.	Доказать: $\angle 1 = \angle 4$.

Полезно сообщить учащимся, что в математике часто встречаются утверждения, которые составляют пару теорем: *прямая* и *обратная*. При этом всегда условие *прямой* теоремы «*...накрест лежащие углы равны...*» в *обратной* теореме является заключением, а заключение *прямой* теоремы «*...прямые параллельны*» в *обратной* теореме является условием. *Прямая* и *обратная* теоремы взаимно обратные.

Заметим, что справедливость прямой теоремы не всегда означает справедливость обратной теоремы. Например, прямая теорема «*Вертикальные углы равны*». Условие — «*Вертикальные углы*», заключение — «*...углы равны*». Сформулируем обратную теорему: «*Если углы равны, то они вертикальные*», что неверно.

Чтобы учащиеся лучше усвоили понятия *прямой* и *обратной* теорем, полезно предложить им сформулировать утверждение, обратное следующему: «*Если один из смежных углов — острый, то другой — тупой*».

Учебный материал данного пункта дает благодатную возможность тщательно отработать введенные здесь понятия *прямой* и *обратной* теорем.

9°. Изложение *метода доказательства от противного* полезно организовать как естественное продолжение разговора о доказательстве теоремы о *свойстве накрест лежащих углов при параллельных прямых*.

Проанализируем схему рассуждений и заметим, что *метод доказательства от противного* состоит из следующих шагов:

1) делаем предположение, противоположное тому, что надо доказать, т.е. заключение теоремы заменяется его отрицанием (1. Предположим, что *накрест лежащие углы* $\angle 2$ и $\angle 4$ не равны);

2) проводим рассуждения, опираясь на аксиомы и теоремы (3. Так как по построению $\angle 2 = \angle 4_1$, то $a_1 \parallel b$ (признак *параллельности прямых*);

3) приходим к противоречию с одной из аксиом или ранее доказанных теорем, либо с определением какого-то понятия (5. Через точку B проходят прямая $a \parallel b$ и прямая $a_1 \parallel b$);

4) приходим к заключению, что предположение (1. Предположим, что *накрест лежащие углы* $\angle 2$ и $\angle 4$ не равны) — неверно;

5) Делаем вывод о верности сформулированного утверждения (7. Отсюда, $\angle 2 = \angle 4$ (*накрест лежащие углы*, образованные секущей c с *параллельными прямыми* a и b, равны).

Поскольку при применении *метода доказательства от противного* заключение теоремы заменяют его отрицанием, то одним из важных навыков, способствующих формированию умения применять метод *доказательства от противного*, является умение выделять условие и заключение данного утверждения.

10°. Доказательство следствия из теоремы о *свойстве накрест лежащих углов* при *параллельных прямых* полезно организовать в форме фронтальной работы с классом.

Фактически это следствие можно рассматривать как задачу на закрепление *метода доказательства от противного* и понятий *прямой* и *обратной* теорем.

Следует предложить учащимся сформулировать утверждение, обратное следствию.

Следствие. *Если прямая перпендикулярна одной из параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой* (рис. 101).

Обратное утверждение. *Если две прямые перпендикулярны третьей прямой, то они параллельны* (рис. 102).

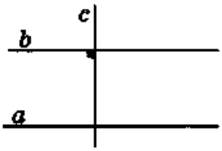


Рис. 101

Дано: $a \parallel b$, $b \perp c$.

Доказать: $a \perp c$

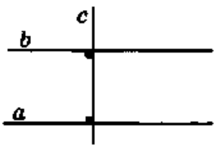


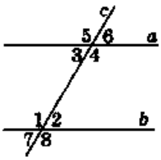
Рис. 102

Дано: $a \perp c$, $b \perp c$.

Доказать: $a \parallel b$

Полезно обратить внимание учащихся на то, что обратное утверждение уже было доказано.

11°. Затем предложить им сформулировать самостоятельно утверждения, обратные признакам параллельности прямых, то есть свойства *односторонних и соответственных углов при параллельных прямых*.



Прямая теорема. Дано: a и b — прямые; c — секущая; $\angle 1 = \angle 4$	Прямая теорема. Дано: a и b — прямые; c — секущая; $\angle 2 + \angle 4 = 180°$.	Прямая теорема. Дано: a и b — прямые; c — секущая; $\angle 2 = \angle 6$.
Доказать: $a \parallel b$.	Доказать: $a \parallel b$.	Доказать: $a \parallel b$.
Обратная теорема. Дано: a и b — прямые; c — секущая; $a \parallel b$	Обратная теорема. Дано: a и b — прямые; c — секущая; $a \parallel b$	Обратная теорема. Дано: a и b — прямые; c — секущая; $a \parallel b$
Доказать: $\angle 1 = \angle 4$.	Доказать: $\angle 2 + \angle 4 = 180°$.	Доказать: $\angle 2 = \angle 6$.

Рис. 103

Для экономии времени полезно сделать плакат, как на рисунке 103. Это позволит не записывать условия теорем и в процессе изучения нового материала, а производить его систематизацию.

Доказательства свойств *односторонних и соответственных углов при параллельных прямых* — просты. Поэтому можно порекомендовать задать их на дом.

12°. В качестве упражнений на закрепление *свойств углов при параллельных прямых* можно предложить задания 1–3 из дополнительных задач методического пособия по готовым чертежам.

> *При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует записать формулировки **свойств углов при параллельных прямых**. Затем на закрепление понятий* прямой *и* обратной *теорем выполнить задание **145**, а на закрепление **свойств** углов при **параллельных прямых** задания **147–149**, которые аналогичны заданиям 1–3 из дополнительных задач методического пособия. При этом на их решение будет затрачено значительно меньше времени. Кроме того, у учащихся останутся чертежи и условия даже тех задач, которые решались устно. А задачу **149** рекомендуется решить письменно.*

13°. Предлагаемое ниже планирование предполагает, что проверка усвоения учащимися доказательств теорем будет проводиться на третьем уроке. Для этого полезно снова использовать рисунок или плакат, приведенный на рисунке 103.

14°. В задаче 212 продолжается исследование вопроса о свойствах параллельности прямых. Поэтому полезно разобрать решение этой задачи по тексту учебника на третьем уроке после проверки знаний учащихся по теме «Параллельные прямые». Доказательство сформулированного в задаче свойства углов с параллельными сторонами довольно часто используется при решении задач.

Примерное планирование изучения материала

На первом уроке: в классе — изложить весь теоретический материал пунктов 27 и 28, решить задачи 186 в), 197, 198 и 199 из учебника; дома — вопросы 8–11 из вопросов для повторения к главе III, задачи 186 а) и б), 191 и 200 из учебника.

На втором уроке: в классе — провести в качестве проверки домашнего задания самостоятельную работу по теме «Признаки параллельности прямых», изложить весь теоретический материал пункта 29 (§2, глава III), решить задачи 1–4 из дополнительных задач тематического планирования; дома — вопросы 12–15 из вопросов для повторения к главе III, задачи **201**, **202**, **206** из учебника.

На третьем уроке: в классе — изложить весь теоретический материал пункта 30 (§2, глава III); дома — вопросы 16 и 17 из вопросов для повторения к главе III, задачи **204**, **208** из учебника.

На четвертом уроке: в классе — провести опрос учащихся и провести самостоятельную работу по теме: «Параллельные прямые», дома — задачи **210** и **211** из учебника.

Самостоятельная работа по теме: «Признаки параллельности прямых».

Самостоятельная работа планируется на 10 мин.

1-й вариант

1. При пересечении двух прямых n и m секущей k разность накрест лежащих углов равна 36°. Определите взаимное расположение прямых n и m.

Ответ: а) *прямые n и m перпендикулярны*;
б) *прямые n и m пересекаются*;
в) *прямые n и m параллельны.*

2. При пересечении двух прямых n и m секущей k каждый из односторонних углов равен 72°. Определите взаимное расположение прямых n и m.

Ответ: а) *прямые n и m перпендикулярны*;
б) *прямые n и m пересекаются*;
в) *прямые n и m параллельны.*

3. При пересечении двух прямых *n* и *m* секущей *k* разность накрест лежащих углов равна 90°. Определите взаимное расположение прямых *n* и *m*.

Ответ: а) *прямые n и m перпендикулярны*;
б) *прямые n и m пересекаются*;
в) *прямые n и m параллельны.*

2-й вариант

1. При пересечении двух прямых *m* и *n* секущей *k* каждый из накрест лежащих углов равен 104°. Определите взаимное расположение прямых *n* и *m*.

Ответ: а) *прямые n и m перпендикулярны*;
б) *прямые n и m пересекаются*;
в) *прямые n и m параллельны.*

2. При пересечении двух прямых *n* и *m* секущей *k* сумма односторонних углов равна 172°. Определите взаимное расположение прямых *n* и *m*.

Ответ: а) *прямые n и m перпендикулярны*;
б) *прямые n и m пересекаются*;
в) *прямые n и m параллельны.*

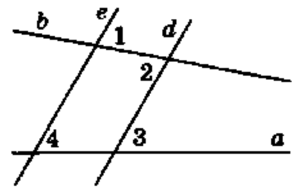
3. При пересечении двух прямых *n* и *m* секущей *k* сумма односторонних углов равна 90°. Определите взаимное расположение прямых *n* и *m*.

Ответ: а) *прямые n и m перпендикулярны*;
б) *прямые n и m пересекаются*;
в) *прямые n и m параллельны.*

Самостоятельная работа по теме: «Параллельные прямые».

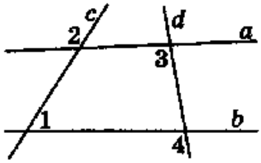
Самостоятельная работа планируется на 15 мин.

1-й вариант



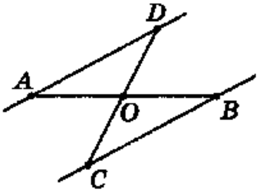
1. Дано $\angle 1 = \angle 2$. Определите пару параллельных прямых.

Ответ: ____________________



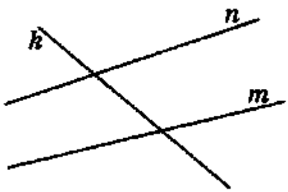
2. Дано: $\angle 1 = 55°$; $\angle 2 = 125°$; $\angle 3 = 123°$. Найдите $\angle 4$.

Ответ: ____________________



3. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O. Известно, что точка O — середина отрезка AB, а прямые AD и CB параллельны. Определите, чему равен отрезок AD, если $OC = 8$ см, а $CB = 13$ см.

Ответ: ____________________



4. Сумма двух односторонних углов, образованных пересечением прямых m и n секущей k, равна 148°. Определите взаимное расположение прямых n и m.
   1. Прямые n и m пересекаются.
   2. Прямые n и m параллельны.
   3. Такая ситуация невозможна.

5. Сформулируйте утверждение, обратное следующему: ***«Если медиана треугольника является его высотой, то треугольник — равнобедренный»***.

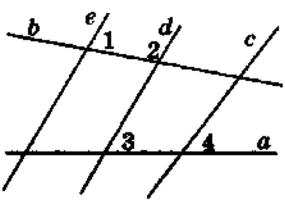
Ответ: ____

____

____

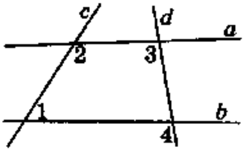
____

2-й вариант



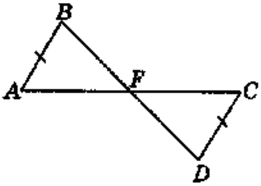
1. Дано: $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, $\angle 3 \neq \angle 4$. Определите, какие из трех прямых c, d, e параллельны.

Ответ: ____________________



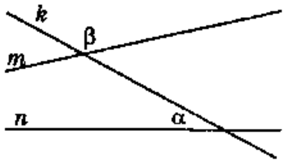
2. Дано: $\angle 1 = 45°$; $\angle 2 = 135°$; $\angle 3 = 124°$. Найдите $\angle 4$.

Ответ: ____________________



3. В треугольниках ABF и CDF стороны $AB = DC$ и лежат на параллельных прямых. Определите, чему равен отрезок AC, если $FA = 9$ см, а $AB = 8$ см.

Ответ: ____________________



4. Угол α, образованный при пересечении прямых n и k, равен 30°, а угол β, образованный при пересечении прямых m и k, на 120° больше угла α. Определите взаимное расположение прямых n и m.
   1. Прямые n и m пересекаются.
   2. Прямые n и m параллельны.
   3. Такая ситуация невозможна.

5. Сформулируйте утверждение, обратное следующему: «Если биссектриса треугольника является его высотой, то треугольник — равнобедренный».

Ответ: ____

____

____

____

____

Указания к решению задач

При решении задачи **197** есть возможность несколько раз повторить аксиому параллельных прямых, что позволит четко выделить то расположение прямых, при котором происходит пересечение данной прямой с прямыми, проходящими через данную точку.

В задаче **206** необходимо обратить внимание на два возможных варианта расположения точек A и D относительно прямой BC.

Дополнительные задачи

1. На рисунке 104 $d \parallel f$; $f \parallel h$; $\angle 1 = 24°$. Чему равны $\angle 2$ и $\angle 3$?

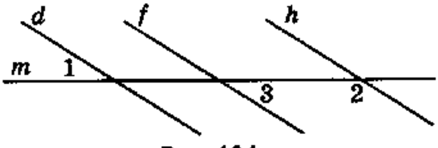


Рис. 104

2. На рисунке 105 угол ABC равен 58°, $DK \parallel GC$ найдите градусную меру:

1) угла, который образует с углом ABC пару односторонних углов;

2) угла, который образует с углом ABC пару накрест лежащих углов;

3) угла, который образует с углом ABC пару соответственных углов;

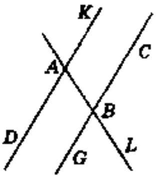


Рис. 105

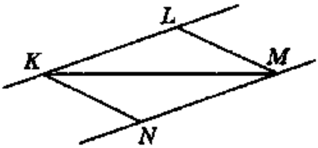


Рис. 106

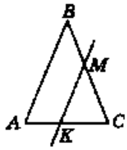


Рис. 107

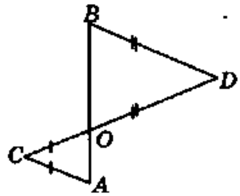


Рис. 108

3. Равные отрезки KL и NM лежат на параллельных прямых, KM — секущая. Докажите, что $\Delta KLM = \Delta MNK$ (рис. 106).

4. Треугольник ABC равнобедренный с основанием AC (рис. 107). Известно, что внутренние накрест лежащие углы при прямых AB и MK и секущей AC равны. Докажите, что треугольник KMC равнобедренный.

5. Треугольники AOC и BOD — равнобедренные с основаниями AO и BO соответственно. Докажите, что $AC \parallel BD$ (рис. 108).

6. Чему равны односторонние углы при двух параллельных прямых и секущей, если один из них в 2 раза меньше другого?

7. Докажите, что прямая, параллельная основанию AC равнобедренного треугольника ABC, перпендикулярна его медиане BD.

Систематизация и обобщение знаний (2 ч) по теме «Параллельные прямые»

Комментарий для учителя

1°. Систематизация и обобщение знаний учащихся по теме «Параллельные прямые» должны помочь определить уровень освоения знаний и умений:

– распознавать и изображать на чертежах и рисунках: односторонние, накрест лежащие и соответственные углы; углы с соответственно параллельными и перпендикулярными сторонами;

– выделять в конфигурации, данной в условии задачи: параллельные прямые, односторонние, накрест лежащие и соответственные углы; углы с соответственно параллельными и перпендикулярными сторонами;

– иллюстрировать и объяснять формулировки: признаков параллельности прямых, свойства углов, образованных при пересечении параллельных прямых секущей; теоремы об углах с соответственно параллельными и перпендикулярными сторонами;

– доказывать: признаки параллельности прямых, свойства углов, образованных при пересечении параллельных прямых секущей (требование только для сильных учащихся); теоремы об углах с соответственно параллельными и перпендикулярными сторонами;

– применять при решении задач на вычисления и доказательство:

- определения односторонних, накрест лежащих и соответственных углов;
- признаки параллельиости прямых, свойства углов, образованных при пересечении параллельных прямых секущей;
- теоремы об углах с соответственно параллельными и перпендикулярными сторонами;
- применять в простых ситуациях метод доказательства от противного.

2°. При подготовке к контрольной работе можно подобрать задачи из разделов «Дополнительные задачи» учебника в зависимости от уровня подготовки класса. Домашнее задание можно также сформировать из «Дополнительных задач» учебника.

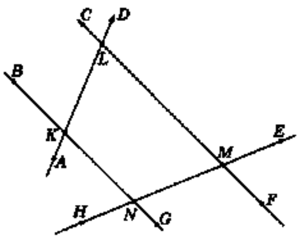
Возможен второй вариант, при котором используются тесты из сборника авторов Т.М. Мищенко и А.Д. Блинкова. «Геометрия. Тесты 7 класс» к учебнику Л.С. Атанасяна и др. «Геометрия 7–9».

Из сборника тестов предложить учащимся выполнить тест 7, рекомендованный для главы 3 «Параллельные прямые», и направленный на оперативную проверку основных умений, формируемых при изучении этой темы. Поскольку каждый тест имеет четыре варианта, то можно просто использовать все восемь вариантов или создать из них один тест, используя часть заданий из каждого варианта теста. Первый вариант более приемлемый, так как при разборе решения заданий позволяет более глубоко и всесторонне систематизировать пройденный материал. Разобрать решения заданий следует сразу после выполнения тестов с активным привлечением учащихся.

3°. В контрольной работе первые три задачи — это задачи со свободным ответом. Надо напомнить учащимся, что делать запись при решении этих задач не следует. В задачах 4–5 решение записывается полностью с записью условия и выполнением чертежа.

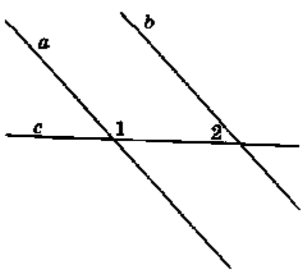
Контрольная работа по теме: «Параллельные прямые»

1-й вариант



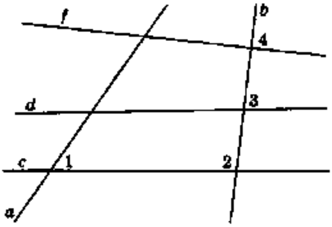
1. Укажите два угла, каждый из которых образует с углом LKN пару соответственных углов.

Ответ: ____________________



2. Параллельные прямые a и b пересечены секущей c. Найдите $\angle 1$, если он в три раза больше $\angle 2$.

Ответ: ____________________



3. Дано $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 4 > \angle 3$. Определите пару параллельных прямых.

Ответ: ____________________

4. Отрезок AD — биссектриса треугольника ABC. Через точку D проведена прямая, параллельная стороне AB и пересекающая сторону AC в точке F. Найдите углы треугольника ADF, если $\angle BAC = 72°$.

5. Сформулируйте утверждение, обратное следующему: *«Если биссектрисы накрест лежащих углов при прямых a и b и секущей c параллельны, то прямые a и b параллельны»*.

Ответ: ____

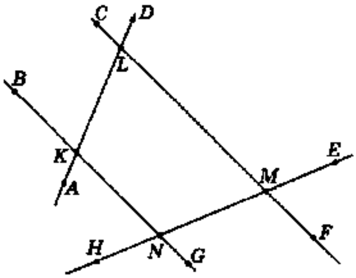
____

____

____

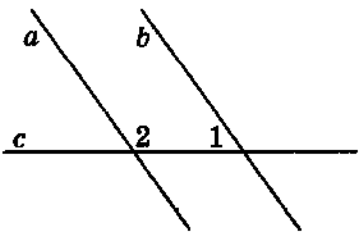
____

2-й вариант



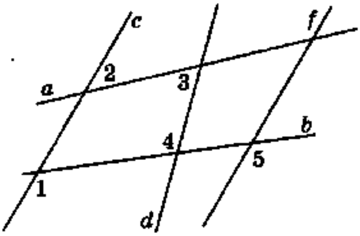
1. Укажите два угла, каждый из которых образует с углом KML пару соответственных углов.

Ответ: ____________________



2. Параллельные прямые a и b пересечены секущей c. Найдите $\angle 2$, если он на $50°$ меньше $\angle 1$.

Ответ: ____________________



3. Дано $\angle 1 = \angle 5$, $\angle 3 + \angle 4 \neq 180°$. Определите пару параллельных прямых.

Ответ: ____________________

4. Отрезок AD — биссектриса треугольника ABC. Через точку D проведена прямая, пересекающая сторону AB в точке E так, что $AE = ED$. Найдите углы треугольника AED, если $\angle BAC = 64°$.

5. Сформулируйте утверждение, обратное следующему: ***«Если биссектрисы соответственных углов при прямых a и b и секущей c перпендикулярны, то прямые a и b параллельны».***

Ответ: ____

____

____

____

____

ГЛАВА IV. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ТРЕУГОЛЬНИКА (13 ч)

Комментарий для учителя

В главе рассматривается материал, традиционный для любого курса планиметрии: теорема о сумме углов треугольника, теорема о внешнем угле треугольника, теорема о соотношении между сторонами и углами треугольника, признаки равенства прямоугольных треугольников, свойство прямоугольного треугольника, у которого один угол равен 30°, признак равнобедренного треугольника, неравенство треугольника.

Теоретический материал этой главы широко применяется при решении самых разнообразных геометрических задач. Доказанные здесь теоремы и формулы служат основой алгебраического аппарата геометрии.

Здесь рассматривается одна из важнейших теорем курса — теорема о сумме углов треугольника, в которой впервые формулируется неочевидный факт. Эта теорема служит основой для доказательства важных свойств треугольников: свойства внешнего угла треугольника, признака равнобедренного треугольника, теоремы о соотношении между сторонами и углами треугольника, некоторых свойств и признаков равенства прямоугольных треугольников.

В этой же главе проводится классификация треугольников по углам: остроугольные, прямоугольные и тупоугольные.

При введении понятия *расстояния между параллельными прямыми* у учащихся формируется представление о параллельных прямых как равноотстоящих друг от друга (точка, движущаяся по одной из параллельных прямых, все время остается на одном и том же расстоянии от другой прямой) прямых, что будет использоваться в дальнейшем курсе планиметрии и при изучении стереометрии.

В главе рассматривается пятая из основных задач на построение с помощью циркуля и линейки, а именно, построение треугольника по трем сторонам. Здесь же приведены примеры задач на построение, при решении которых используются основные алгоритмы решения задач на построение.

При решении задач на построение рекомендуется ограничиться только выполнением построения искомой фигуры с помощью циркуля и линейки. В отдельных случаях можно провести устно анализ и доказательство, а элементы исследования могут присутствовать лишь тогда, когда это оговорено условием задачи.

Теоремы, рассмотренные в этой главе, продолжают расширять круг задач, связанных с вычислениями. А рассматриваемые признаки равенства прямоугольных треугольников позволяют продолжить исследования основной фигуры планиметрии — треугольника.

Планируемые итоговые результаты изучения четвертой главы:

Учащиеся должны научиться:

– распознавать и изображать на чертежах и рисунках: остроугольный, прямоугольный, тупоугольный треугольник, внешний угол треугольника;

– выделять в конфигурации, данной в условии задачи: остроугольный, прямоугольный, тупоугольный треугольник, внешний угол треугольника;

– объяснять термины: *«остроугольный треугольник»*, *«прямоугольный треугольник»* и *«тупоугольный треугольник»*, *«катет»*, *«гипотенуза»*;

– объяснять понятия *«расстояние от точки до прямой»* и *«расстояние между параллельными прямыми»*, *«перпендикуляр, опущенный из данной точки на данную прямую»*;

– иллюстрировать и объяснять формулировки: теоремы о сумме углов треугольника; теоремы о внешнем угле треугольника, признаков равенства прямоугольных треугольников; свойства прямоугольного треугольника, у которого один угол равен 30°; свойства параллельных прямых, признака равнобедренного треугольника;

– доказывать теорему о сумме углов треугольника, теорему о внешнем угле треугольника, теорему о соотношении между сторонами и углами треугольника, признаки равенства прямоугольных треугольников, свойство прямоугольного треугольника, у которого один угол равен 30°; признак равнобедренного треугольника, неравенство треугольника;

– определять вид треугольника по углам, применяя теорему о сумме углов треугольника;

– применять при решении задач на вычисления и доказательство:

- теорему о сумме углов треугольника, теорему о внешнем угле треугольника;
- теорему о соотношении между сторонами и углами треугольника;
- признак равнобедренного треугольника;

- признаки равенства прямоугольных треугольников, свойство прямоугольного треугольника, у которого один угол равен 30°;
- неравенство треугольника;
- метод от противного;
- алгебраический аппарат;

– применять при решении задач на построение основные алгоритмы построения с помощью циркуля и линейки.

§1. Сумма углов треугольника (1 ч)

Комментарий для учителя

Теорема о сумме углов треугольника является частным случаем теоремы о сумме углов многоугольника. После изучения данной темы значительно увеличивается объем задач на вычисления.

Текущие результаты изучения параграфа 1. Учащиеся должны:

– распознавать и изображать на чертежах и рисунках: остроугольный, прямоугольный, тупоугольный треугольник, внешний угол треугольника;

– объяснять термины: остроугольный треугольник, прямоугольный треугольник и тупоугольный треугольник, катет и гипотенуза, внешний угол треугольника;

– формулировать и доказывать теоремы о сумме углов треугольника и о внешнем угле треугольника;

– решать задачи, применяя теоремы о сумме углов треугольника и о внешнем угле треугольника.

Методические рекомендации к изучению материала

1°. Если уровень геометрической подготовки класса позволяет, то можно при доказательстве теоремы о *сумме углов треугольника* привлечь учащихся, активизируя их знания понятия и свойств *накрест лежащих* углов.

Изучение теоремы начинается с формулировки, выполнения чертежа 109 по условию теоремы и с краткой записи условия и заключения.

«*Сумма углов треугольника равна* 180°».

Необходимо заметить, что для проведения обоснований выполняется дополнительное построение.

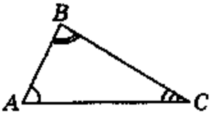


Рис. 109

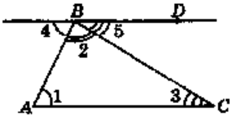


Рис. 110

Дано: $\triangle BAC$ (рис. **109**)

Доказать: $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180°$

Доказательство.

1. Проведем через вершину B прямую BD, параллельную AC (рис. **110**).

2. $\angle 1 = \angle 4$ как *накрест лежащие*, так как $BD \parallel AC$ и AB — секущая;

3. $\angle 3 = \angle 5$ как *накрест лежащие*, $BD \parallel AC$ и BC — секущая;

4. $\angle 4$, $\angle 2$ и $\angle 5$ составляют развернутый угол;

5. $\angle 4 + \angle 2 + \angle 5 = 180°$, так как градусная мера развернутого угла равна 180°.

В качестве упражнений на непосредственное применение теоремы *о сумме углов треугольника* можно использовать задачи **223** а) и б) и **225** из учебника. При решении задачи **225** полезно напомнить учащимся, что ранее было доказано, что в равностороннем треугольнике все углы равны.

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует записать формулировку теоремы о ***сумме углов треугольника****. Затем на прямое закрепление выполнить задания* ***151, 154–156****, которые вполне могут заменить рекомендованные задачи из учебника. При этом у учащихся останутся чертежи и условия задач. Перед решением задачи* ***225*** *можно предложить учащимся посмотреть решение задачи* ***109*** *из рабочей тетради.*

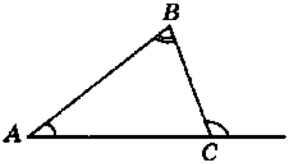


Рис. 111

2°. Понятие *внешний угол треугольника* полезно ввести конструктивно. Продолжим сторону AC треугольника ABC за точку C (рис. **111**). Получим при вершине C еще один угол. Он называется *внешним углом треугольника*.

С целью подведения учащихся к определению *внешнего угла треугольника* следует обратить их внимание на важный момент: угол треугольника при вершине и *внешний угол треугольника* являются *смежными углами*. После этого сформулировать определение *внешнего угла треугольника*.

Для проверки правильности усвоения учащимися понятия *внешнего угла треугольника* и умения находить его в стандартных ситуациях следует выполнить работу по готовым чертежам, (например, как на рисунке **112**, включив в их набор контрпример в):

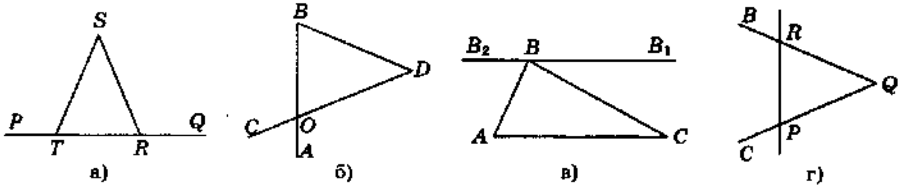


Рис. 112

1. На рисунках для каждого треугольника найдите *внешние углы*.

2. Объясните, почему эти углы являются *внешними*.

3. Определите, являются ли углы на рисунке **112 в)** *внешними углами треугольника* и почему.

Используя рисунок **112 б)**, следует обратить внимание на то, что при каждой вершине треугольника можно построить два внешних угла, продолжая одну или другую сторону внутреннего угла треугольника. Они представляют собой пару вертикальных углов и, значит, равны между собой.

3°. В доказательстве утверждения *о внешнем угле треугольника* используются ссылки на определение внешнего угла треугольника, на теорему о сумме углов треугольника и свойство смежных углов. Само доказательство несложное и может быть проведено учащимися под руководством учителя.

Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов треугольника, не смежных с ним.

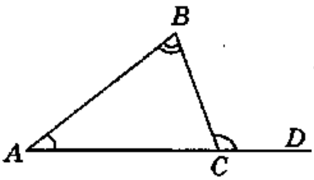


Рис. 113

Дано: ΔBAC (рис. **113**)

$\angle BCD$ — *внешний угол.*

Доказать: $\angle ABC + \angle BAC = \angle BCD$.

Доказательство.

1. $\angle BCD = 180° - \angle BCA$ по теореме о смежных углах;

2. Но $180° - \angle BCA = \angle ABC + \angle BAC$ по теореме *о сумме углов треугольника;*

3. Значит, $\angle BCD = \angle ABC + \angle BAC$.

В качестве упражнений на непосредственное применение теоремы *о внешнем угле треугольника* можно предложить решить устно с выполнением чертежа на доске следующие задачи.

1. Найдите градусные меры внешних углов равностороннего треугольника.

2. Найдите углы равнобедренного треугольника, если внешний угол при основании равен 112°.

*В рабочей тетради следует записать формулировку теоремы о **внешнем угле треугольника**. Затем на прямое закрепление выполнить задания **160** и **162**, которые совпадают с выше приведенными задачами. Решение задачи **163** следует оформить письменно.*

4°. Результат решения задачи **226**, если его сформулировать следующим образом: «*В равнобедренном треугольнике два угла острые*», — можно использовать для беседы о свойствах углов треугольника:

1. Может ли треугольник иметь два тупых угла?

2. Может ли треугольник иметь два прямых угла?

После этого напомнить учащимся классификацию треугольников по углам, известную им из начальной школы. А затем рассмотреть следующие вопросы:

1. Может ли равносторонний треугольник быть тупоугольным?

2. Может ли равносторонний треугольник быть прямоугольным?

*При использовании в процессе обучения рабочей тетради вместо выше приведенных задач выполнить задания **157**, **158**, **164** и **165**. Решения задач **157** и **164** приведены в тетради, а задачи **158** и **165** решаются аналогично. Задачи **167** и **168** позволяют напомнить учащимся свойство радиусов одной окружности. Поэтому эти задачи в определенном смысле являются пропедевтикой к изучению §4 данной главы.*

5°. Предлагаемое ниже планирование предполагает, что на изучение данного параграфа отводится один урок. Дело в том, что в параграфах 1 и 2 изучаются свойства углов треугольника и их взаимосвязь со сторонами. Поэтому представляется полезным провести проверку знаний учащихся по материалу этих двух параграфов на первом уроке изучения темы «*Соотношения между сторонами и углами треугольника*». Это значительно сэкономит время на изучение данной темы. Учащимся обязательно нужно сообщить, на каком уроке будет проведена проверка знаний по данной теме. Умение применять теорему «*Сумма углов треугольника*» можно проверить на следующем уроке, проведя самостоятельную работу вместо проверки домашней работы.

Примерное планирование изучения материала

На уроке: в классе — изложить весь теоретический материал параграфа 1, решить задачи **223** а) и б), **225**, **226**, **227** а), **228** в), **234**; дома — вопросы 1–5 из вопросов для повторения к главе IV, задачи **227** б), **228** а), б), **230** и **232**.

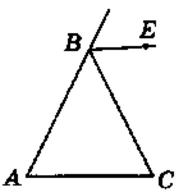
Самостоятельная работа по теме: «Сумма углов треугольника. Внешний угол треугольника»

Самостоятельная работа планируется на 15 минут.

1-й вариант

1. Определите вид треугольника, если сумма двух его углов равна третьему углу.

1. Треугольник — остроугольный.
2. Треугольник — прямоугольный.
3. Треугольник — тупоугольный.
4. Определить невозможно.



2. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса BE внешнего угла при вершине B. Определите взаимное расположение прямых BE и AC.

1. Прямые BE и AC перпендикулярны.
2. Прямые BE и AC пересекаются, но не перпендикулярны.
3. Прямые BE и AC параллельны.

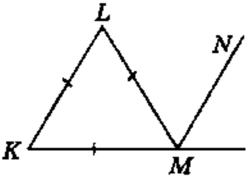
3. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB проведена биссектриса AP. Найдите угол ABC, если угол APB равен $105°$.

Ответ: ______________________________

2-й вариант

1. Определите вид треугольника, если сумма двух его углов меньше третьего угла.

1. Треугольник — остроугольный.
2. Треугольник — прямоугольный.
3. Треугольник — тупоугольный.
4. Определить невозможно.



2. В равностороннем треугольнике KLM проведена биссектриса MN внешнего угла при вершине M. Определите взаимное расположение прямых KL и MN.
 1. Прямые KL и MN перпендикулярны.
 2. Прямые KL и MN пересекаются, но не перпендикулярны.
 3. Прямые KL и MN параллельны.

3. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса AP. Найдите угол ACB, если угол APB равен $111°$.
 Ответ: ______________________________

Дополнительные задачи

1. В треугольнике ABC угол A в 2 раза больше угла B, а $\angle C = 30°$. Определите $\angle A$ и $\angle B$.

2. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Найдите углы треугольника ABC, если $AD = AC = DB$.

Решение. Пусть $\angle BAC = 2\alpha$ (рис. 114). Тогда: $\angle DAC = \angle DAB = \angle ABC = \alpha$, значит, $\angle ADC = \angle ACB = 2\alpha$. $\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 2\alpha + \alpha + 2\alpha = 180°$. $\angle BAC = 72°$, $\angle ABC = 36°$, $\angle ACB = 72°$.

3. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что биссектриса угла A делит этот треугольник на два равнобедренных треугольника.
 Решение аналогично решению задачи 2.
 Ответ: 1) $36°$, $72°$, $72°$; 2) $90°$, $45°$, $45°$.

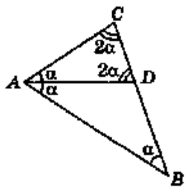


Рис. 114

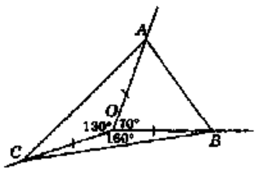


Рис. 115

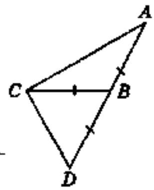


Рис. 116

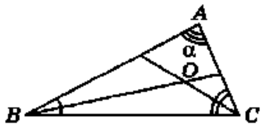


Рис. 117

4. Три луча, на которых отмечены точки A, B и C, имеют общее начало — точку O. Известно, что $OA = OB = OC$, и $\angle AOB = 70°$, $\angle BOC = 160°$, $\angle COA = 130°$. Найдите углы треугольника ABC.
 Решение задачи следует из рисунка 115.

5. Докажите, что если в треугольнике ACD медиана, выходящая из вершины C, в два раза меньше стороны AD, то $\angle ACD = 90°$.

Решение. Пусть $\angle ABC = \alpha$ (рис. 116). Тогда: $\angle BAC = \angle BCA = \frac{1}{2}(180° - \alpha) = 90° - \frac{1}{2}\alpha$, $\angle BDC = \angle BCD = \frac{1}{2}\alpha$. Значит, $\angle ACD = \angle ACB + \angle BCD = (90° - \frac{1}{2}\alpha) + \frac{1}{2}\alpha = 90°$.

6. Биссектрисы углов ABC и ACB треугольника ABC пересекаются в точке O. Найдите угол BOC, если $\angle BAC = \alpha$.

Решение. На рисунке 117 $\angle BOC = 180° - (\angle OBC + \angle OCB) = 180° - \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB) = 180° - \frac{1}{2}(180° - \angle BAC) = 180° - \frac{1}{2}(180° - \alpha) = 90° + \frac{1}{2}\alpha$.

7. Биссектриса угла, смежного с углом C треугольника ABC, пересекает продолжение стороны AB за точку B в точке D, а биссектриса угла, смежного с углом A, пересекает продолжение BC за точку C в точке E. Известно, что $DC = CA = AE$. Найдите углы треугольника ABC.

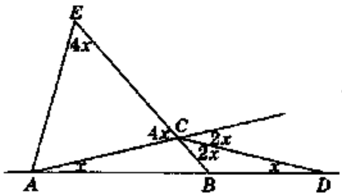


Рис. 118

Решение. Пусть $\angle BAC = x$, тогда $\angle ADC = x$. Внешний угол треугольника ACD при вершине C равен $2x$ (рис. 118). Этот угол есть половина внешнего угла C треугольника ABC. Значит, $\angle AEC = \angle ACE = 4x$, $\angle EAC = 180° - 8x$. Но $\angle EAC$ есть половина внешнего угла при вершине А, то есть $\angle EAC = \frac{1}{2}(180° - x)$.

§2. Соотношения между сторонами и углами треугольника (3 ч)

Комментарий для учителя

В этом параграфе расширяются сведения о свойствах равнобедренного треугольника (признак равнобедренного треугольника). Среди задач, рекомендованных к этому пункту, значительную часть составляют задачи на доказательство, которые могут быть доказаны различными способами, в частности, методом от противного. Такие задачи полезно решить или провести проверку их решения в классе, привлекая к их решению учащихся.

Текущие результаты изучения параграфа 2. Учащиеся должны:

– формулировать и доказывать теоремы *о соотношении между сторонами и углами треугольника, признак равнобедренного треугольника, неравенство треугольника;*

– решать задачи, применяя теоремы о *соотношении между сторонами и углами треугольника, признак равнобедренного треугольника, неравенство треугольника.*

Методические рекомендации к изучению материала

1°. Доказательство теоремы о *соотношении между сторонами и углами треугольника* достаточно прозрачно, поэтому его можно организовать в форме беседы, привлекая учащихся по ходу доказательства.

Изучение теоремы начинается с формулировки теоремы, выполнения чертежа **119** по условию теоремы и с краткой записи условия и заключения.

Следует обратить внимание учащихся, что формулировка теоремы содержит два утверждения, поэтому записываем два условия:

В треугольнике против большей стороны лежит больший угол.	*В треугольнике против большего угла лежит большая сторона.*
Дано: $AB > AC$;	Дано: $\angle C > \angle B$;
Доказать: $\angle C > \angle B$.	Доказать: $AB > AC$.

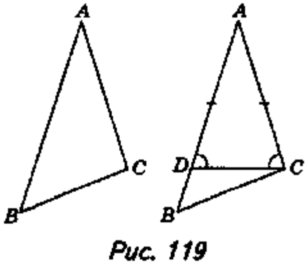


Рис. 119

Из формулировок и особенно из записей условий, сформулированных в теореме утверждений, следует вывод, что эти два утверждения являются обратными теоремами.

Доказательство первого утверждения проводится на основе дополнительного построения (рис. **119**).

1. На большей стороне AB от вершины A отложим отрезок AD, равный меньшей стороне AC. $D \in AB$, так как $AC < AB$.
2. Отсюда луч CD проходит внутри угла ACD и, значит, $\angle ACD < \angle ACB$.
3. $\angle ADC = \angle ACD$ как углы равнобедренного треугольника, так как $AD = AC$ по построению.
4. $\angle ADC$ — внешний угол ΔBDC. Значит, $\angle ADC = \angle DBC + \angle DCB$.
5. Отсюда $\angle DBC < \angle ADC = \angle ACD$.

2°. Доказательство второго утверждения проводится *методом от противного*. При этом представляется полезным напомнить учащимся схему рассуждений:

1) делаем предположение, противоположное тому, что надо доказать, т.е. заключение теоремы заменяется его отрицанием (предположим, что $AB = AC$);

2) проводим рассуждения, опираясь на аксиомы и теоремы (Так как $AB = AC$, то треугольник ACB — равнобедренный);

3) приходим к противоречию с условием теоремы ($\angle C > \angle B$);

4) приходим к заключению, что предположение ($AB = AC$) — неверно;

5) Делаем вывод о верности сформулированного утверждения ($AB > AC$).

Если предположить, что $AB < AC$, то приходим к противоречию с первой частью теоремы.

3°. Следствия из теоремы о *соотношении между сторонами и углами треугольника* можно рассматривать как задачи на прямое применение теоремы и устно доказать их.

Перед доказательством второго следствия полезно напомнить учащимся, что в равнобедренном треугольнике углы при основании равны. А затем предложить сформулировать обратное утверждение:

Если в треугольнике углы при основании равны, то треугольник — равнобедренный.

Доказательство второго следствия проводится *методом от противного*. Если сделать предположение, что $AB < AC$ (или $AB > AC$), то приходим к противоречию с первым утверждением теоремы.

Необходнмо сообщить учащимся, что второе следствие из теоремы о *соотношении между сторонами и углами треугольника* является (и так будет в дальнейшем называться) *признаком равнобедренного треугольника*. Учащиеся должны хорошо его понимать и уметь использовать при решении задач, поэтому на его отработку следует отвести некоторое время.

4°. Второй урок по данной теме после проверки домашнего задания полезно начать с решения задач на закрепление теоремы о *соотношении между сторонами и углами треугольника*, используя дополнительные задачи из разделов *«Дополнительные задачи»* из методического пособия либо из учебника. Из дополнительных задач методического пособия рекомендуются задания **1–4** для устного решения и задача **5** — письменно, или решить задачи **237** б) и **238** из учебника устно.

> *В рабочей тетради следует записать формулировку теоремы о* ***соотношении*** между ***сторонами и углами треугольника****. Затем на прямое закрепление выполнить устно задания* ***169–174****, а задачу* ***175*** *— письменно. Некоторые из этих задач полностью совпадают с задачами 1–5 из дополнительных задач. Затем записать формулировку* ***признака равнобедренного треугольника****. На закрепление признака равнобедренного треугольника можно выполнить задачи* ***176–179****. В данной теме особенно полезно использование рабочей тетради, так как это позволяет решить значительно большее число задач.*

5°. Изучение *неравенства треугольника* начинается с формулировки теоремы и краткой записи условия и заключения.

Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.

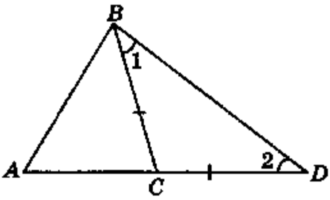


Рис. 120

Дано: $\triangle ABC$

Доказать: $AB < AC + BC$;
$AC < AB + BC$;
$BC < AC + AB$.

Доказательство *неравенства треугольника* проводится на основе дополнительного построения (рис. **120**) с прямой ссылкой на теорему о *соотношении между сторонами и углами треугольника*.

На прямое закрепление *неравенства треугольника* выполнить устно задания **249**, **250** б) и в), а решение задачи **251** разобрать по тексту учебника.

> *В рабочей тетради следует записать формулировку* ***неравенства треугольника****. Затем на прямое закрепление разобрать по тексту тетради решение задачи* ***180****, после чего по аналогии выполнить задания* ***181*** *и* ***182****.*

6°. Как было уже сказано выше, предлагаемое ниже планирование предполагает, что проверка знаний учащихся по материалу параграфов 1 и 2 будет проводиться на третьем уроке. Учащимся обязательно нужно сообщить, что на третьем уроке будет проведена проверка знаний по данной теме.

Примерное планирование изучения материала

На первом уроке: в классе — провести самостоятельную работу по теме *«Сумма углов треугольника. Внешний угол треугольника»*, изложить весь теоретический материал пункта 33; дома — вопросы 6–8 из вопросов для повторения к главе IV, задачи **236**, **237** а), **240** и **241**.

На втором уроке: в классе — изложить весь теоретический материал пункта 34, решить задачи **237** б), **238**, **249**, **250** б) и в) и **251** из учебника, 1–4 из дополнительных задач методического пособия; дома — вопрос 9 из вопросов для повторения к главе IV, задачи **250** а), **252** и **253**.

На третьем уроке: в классе — провести самостоятельную работу по теме *«Соотношения между сторонами и углами треугольника. Неравенство треугольника»*, провести опрос учащихся по учебному материалу параграфов 1 и 2, решить задачи **244**, **245** и **246**; дома — задачи **242**, **243** и **247**.

Самостоятельная работа по теме: «Соотношения между сторонами и углами треугольника. Неравенство треугольника»

Самостоятельная работа планируется на 10 минут.

1-й вариант

1. Определите, против какой стороны треугольника лежит наибольший угол треугольника ABC, если $AB = 17$ см; $BC = 12$ см; $AC = 14$ см.

1. Против стороны AB.
2. Против стороны BC.
3. Против стороны AC.

2. В равнобедренном треугольнике один из углов тупой, одна из сторон имеет длину 15 см, а другая — 10 см. Определите длину основания этого треугольника.

Ответ: ______________________________

3. Углы треугольника относятся как 1 : 1 : 1. Определите вид данного треугольника.

По углам	По сторонам
1. Остроугольный.	1. Разносторонний.
2. Прямоугольный.	2. Равносторонний.
3. Тупоугольный.	3. Равнобедренный.

2-й вариант

1. В треугольнике ABC: $AB = 7$ см; $BC = 13$ см; $AC = 10$ см. Определите, против какой стороны треугольника лежит наименьший угол этого треугольника.
   1. Против стороны AB.
   2. Против стороны BC.
   3. Против стороны AC.
   4. Определить невозможно.
2. В равнобедренном треугольнике одна сторона равна 16 см, другая 8 см. Найдите периметр треугольника.
   Ответ: ____________________
3. Углы треугольника относятся как 1 : 3 : 5. Определите вид данного треугольника.

По углам	По сторонам
1. Остроугольный.	1. Разносторонний.
2. Прямоугольный.	2. Равносторонний.
3. Тупоугольный.	3. Равнобедренный.

Указания к задачам

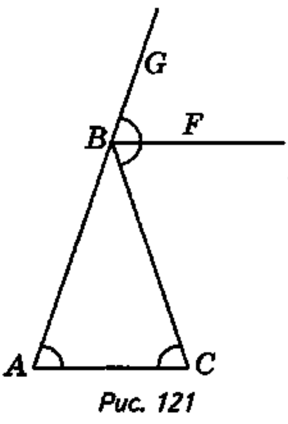


Рис. 121

В задачах 232, 233 и 242 рассматриваются интересные и полезные свойства равнобедренного треугольника, а именно,

1. *«Если треугольник — равнобедренный, то один из его внешних углов в два раза больше угла треугольника, не смежного с ним»* и обратно *«Если один из внешних углов треугольника в два раза больше угла, не смежного с ним, то треугольник — равнобедренный»*.

2. *«Если треугольник равнобедренный, то биссектриса внешнего угла при его вершине параллельна основанию треугольника»* и обратно *«Если биссектриса внешнего угла треугольника параллельна стороне, противолежащей данному углу, то треугольник — равнобедренный»*.

Утверждение, обратное условию задачи **233**. Проведем биссектрису BF угла CBF (рис. **121**). $\angle BCA = \angle CBF$, накрест лежащие при параллельных прямых AC и BF и секущей BC. $\angle BAC = \angle GBF$, соответственные при параллельных прямых AC и BF и секущей AG. $\angle CBF = \angle FBG$, так как BF — биссектриса $\angle CBG$. Следовательно, $\angle GBF = \angle CBF$. Значит, $\angle BAC = \angle BCA$. Отсюда треугольник ABC — равнобедренный.

Дополнительные задачи

1. Стороны треугольника равны 8 см; 9 см и 12 см. Определите, какой угол треугольника наибольший, какой — наименьший?

2. Углы треугольника равны 40° и 80°. Определите, против какого угла треугольника лежит большая сторона.

3. Углы треугольника равны 40° и 60°. Определите, против какого угла треугольника лежит большая сторона.

4. Определите, что больше, боковая сторона или основание равнобедренного треугольника, если один из его углов тупой.

5. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD. Докажите, что если $BC > AB$, то $\angle BDC$ — тупой.

§3. Прямоугольный треугольник (3 ч)

Комментарий для учителя

Теоретический материал темы «*Прямоугольный треугольник*» не является новым для учащихся, в точном понимании новизны. Все используемые здесь понятия уже знакомы учащимся, все теоремы являются либо следствиями уже доказанных теорем, либо знакомыми теоремами, но применяемыми к новому объекту, а потому имеющие специфическую формулировку. Поэтому рекомендуется провести изучение этого параграфа как обобщающее повторение основного учебного материала наиболее значимых тем курса *«Признаки равенства треугольников»* и *«Сумма углов треугольника»*. Повторение в данной ситуации понимается не в смысле снова вернуться к пройденным темам, а в смысле переноса имеющихся у учащихся знаний на новый объект. Кроме того, учебный материал этого параграфа позволяет систематизировать знания учащихся о прямоугольном треугольнике.

Текущие результаты изучения параграфа 3. Учащиеся должны:

– выделять в конфигурации, данной в условии задачи: прямоугольный треугольник;

– иллюстрировать и объяснять формулировки: теоремы о признаках равенства прямоугольных треугольников, свойстве прямоугольного треугольника, у которого один угол равен 30°;

– доказывать признаки равенства прямоугольных треугольников, свойство прямоугольного треугольника, у которого один угол равен 30°;

– применять при решении задач на вычисления и доказательство:

- признаки равенства прямоугольных треугольников, свойство прямоугольного треугольника, у которого один угол равен 30°;
- алгебраический аппарат, метод от противного.

Методические рекомендации к изучению материала

1°. Вернемся к определению *прямоугольного треугольника*, при этом основное внимание учащихся необходимо направить на понимание того, что если в условии сказано: *«Треугольник ABC — прямоугольный...»*, то учащиеся должны *понимать*, что у него *«один угол прямой и два острых*, и что если в условии сказано: *«У треугольника ABC: $\angle C$ — прямой...»*, то учащиеся должны *уметь* сделать заключение о том, что у него *BC* и *AC* — *катеты*, а *AB* — *гипотенуза*.

Для проверки правильности усвоения учащимися понятий: *прямоугольный треугольник*, *катет* и *гипотенуза*, умения находить их в стандартных ситуациях — рекомендуется выполнить работу по готовым чертежам, (например, как на рисунках **122** и **123**).

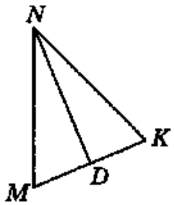


Рис. 122

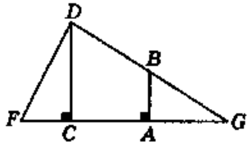


Рис. 123

1. В треугольнике MNK проведена высота ND. Назовите получившиеся при этом прямоугольные треугольники, их гипотенузы и катеты (рис. 122).

2. На рисунке 123 отрезки AB и CD перпендикулярны прямой FG. Найдите прямоугольные треугольники и назовите их гипотенузы и катеты.

2°. Утверждения, выражающие свойства острых углов прямоугольных треугольников:

1. *«у прямоугольного треугольника один угол прямой и два острых»*,

2. *«сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°»*

являются прямыми следствиями из теоремы о сумме углов треугольника и очень просто доказываются. Доказательство первого утверждения было проведено в предыдущем параграфе. Доказательство второго утверждения можно провести фронтально.

Для закрепления доказанных свойств можно предложить задания:

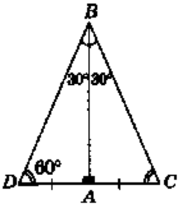
1. Определите острые углы прямоугольного треугольника, если один из них в 2 раза больше другого.

2. Докажите, что если острый угол одного прямоугольного треугольника равен острому углу другого прямоугольного треугольника, то и другие острые углы данных прямоугольных треугольников равны.

Утверждение второй из выше приведенных задач важно и для доказательства признаков равенства прямоугольных треугольников и особенно для обоснований в ходе решения задач на применение признаков равенства треугольников.

3°. Изучение теорем о *свойстве катета прямоугольного треугольника, лежащего против угла в 30°*, и о *свойстве угла прямоугольного треугольника, лежащего против катета, равного половине гипотенузы*, начинается, как всегда, с формулировки теоремы и краткой записи условия и заключения. Сразу заметим, что эти две теоремы составляют пару прямой и обратной теорем.

Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы.

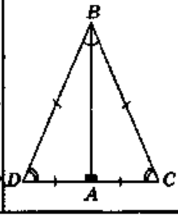


Дано: ΔACB,
$\angle A$ — прямой;
$\angle B = 30°$

Доказать:
$AC = \dfrac{1}{2}BC$.

Рис. 124

Если катет прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы, то угол, лежащий против этого катета, равен 30°.



Дано: ΔACB,
$\angle C$ — прямой;
$AC = \dfrac{1}{2}AB$

Доказать:
$\angle B = 30°$.

Рис. 125

Свойство *катета прямоугольного треугольника, лежащего против угла в 30°*, имеет большое пропедевтическое значение и найдет самое широкое применение при решении задач как в планиметрии, так и в стереометрии.

Доказательство прямой теоремы проводится на основе дополнительного построения (рис. **124**). Затем, так как градусные меры двух углов построенного треугольника DBC равны 60°, то ΔDBC — равносторонний треугольник. $BA \perp DC$, так как BA — катет прямоугольного треугольника ACB. Отсюда, BA — высота, биссектриса и медиана ΔDBC, а значит, $AC = \dfrac{1}{2}DC = \dfrac{1}{2}BC$.

Доказательство обратной теоремы совершенно аналогично (рис. **125**).

Для закрепления доказанных теорем о *свойстве катета прямоугольного треугольника, лежащего против угла в 30°*, и о *свойстве угла прямоугольного треугольника, лежащего против катета, равного половине гипотенузы*, можно предложить решить задачи **256**, **259** и **260**.

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировку свойств прямоугольного треугольника. В тетради уделено достаточно внимания ***свойству прямоугольного треугольника***, *у* ***которого один угол равен 30°.*** *На его закрепление рекомендуются задания* ***184–188***, *часть из них приводятся в дополнительных задачах под номерами* ***6–9.***

3°. Перед рассмотрением *признаков равенства прямоугольных треугольников* полезно вспомнить общие признаки равенства треугольников. Для того чтобы учащиеся поняли особенности признаков равенства прямоугольных треугольников, полезно ответить на вопрос: как изменяются признаки равенства треугольников, если треугольник по определению обладает определенными свойствами?

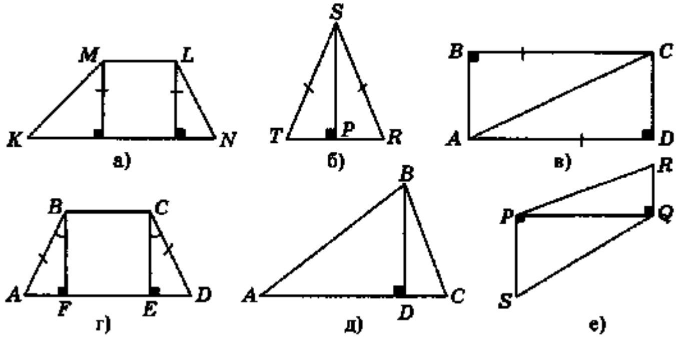


Рис. 126

В данном случае у любых двух прямоугольных треугольников всегда есть по одному равному углу (один из углов всегда прямой). Кроме того, при определении пары равных треугольников следует применять изученные свойства острых углов прямоугольных треугольников. Для этого можно использовать плакаты такого типа, как на рисунке 126:

Укажите, на каких рисунках есть равные треугольники и объясните почему.

Ответы: 1. На рисунке б), так как высота равнобедренного треугольника является биссектрисой и медианой, то $\Delta TSP = \Delta RSP$, либо *по двум сторонам и углу между ними*, либо *по трем сторонам*.

2. На рисунке в), так как $\angle BCA = \angle DAC$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых BC и AD и секущей AC, то $\Delta ABC = \Delta CDA$, либо *по двум сторонам и углу между ними*, либо *по стороне и прилежащим к ней углам*.

3. На рисунке г), так как $\angle BAF = \angle CDE$, поскольку $\angle ABF = \angle DCE$, то $\Delta BAF = \Delta CDE$, *по стороне и прилежащим к ней углам*.

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся выполнить задание 183, которое является полным аналогом работы с плакатом, но не требует от учителя значительных затрат времени на изготовление плаката и значительно сэкономит время при работе с классом на уроке.

Перейдем к рассмотрению *признаков равенства треугольников для прямоугольных треугольников*.

Первый признак равенства произвольных треугольников:

Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

Так как треугольники — прямоугольные, то первый признак равенства для прямоугольных треугольников:

Если катеты одного прямоугольного треугольника равны катетам другого прямоугольного треугольника, то такие прямоугольные треугольники равны.

Второй признак равенства треугольников:

Если сторона и прилежащие к ней углы одного треугольника соответственно равны стороне и прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Так как треугольники — прямоугольные, то они уже имеют по одному равному углу, а именно по прямому углу. Значит, необходимо равенство одного из острых углов, так как по свойству острых углов прямоугольных треугольников: *«если острый угол одного прямоугольного треугольника равен острому углу другого прямоугольного треугольника, то и другие острые углы данных прямоугольных треугольников равны»*. Отсюда, второй признак равенства для прямоугольных треугольников имеет два варианта:

Если катет и острый угол одного прямоугольного треугольника равны соответствующим катету и острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника равны гипотенузе и острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

Третий признак равенства треугольников.

Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Сформулированный и доказанный в учебнике *признак равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и катету* является третьим признаком равенства прямоугольных треугольников:

Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника равны гипотенузе и катету другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

На данном этапе обучения его доказательство достаточно искусственно, но позднее, в VIII классе, этот факт можно будет доказать просто, используя теорему Пифагора. Здесь используется метод наложения, с которым учащиеся познакомились во второй главе при доказательстве этого признака равенства треугольников.

Другие *признаки равенства прямоугольных треугольников* рассматриваются как частный случай общих признаков равенства треугольников. Этим обусловлен тот факт, что предлагаемые на их применение задачи несколько более сложные, чем задачи, которые решались во второй главе. На применение *признаков равенства прямоугольных треугольников* можно рекомендовать из учебника задачи **261 и 263.**

*При использовании в процессе обучения рабочей тетради в ходе решения задач **189–192** можно обсудить вопрос: как изменяются признаки равенства треугольников, если треугольники по определению являются прямоугольными, и доказать их.*

*После этого сформулировать признак равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и катету. На применение **признаков равенства прямоугольных треугольников** можно решить задачи **193** и **194**.*

Примерное планирование изучения материала

На первом уроке: в классе — изложить весь теоретический материал пункта 35, решить задачи **256**, **259** и **260**; дома — вопросы 10, 11 из вопросов для повторения к главе IV, задачи **254**, **257** и **258**.

На втором уроке: в классе — изложить весь теоретический материал пункта 36, решить задачи **261** и **263**; дома — вопросы 12, 13 из вопросов для повторения к главе IV, прочитать пункт 36, задачи **262**, **264** и **266**.

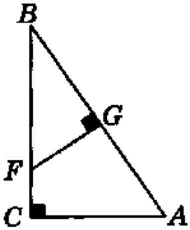
На третьем уроке: в классе — провести самостоятельную работу; решить задачи **267**, **269** и **270** из учебника, **8** и **9** из дополнительных задач; дома — задачи **255**, **265**, **268**.

Самостоятельная работа по теме: «Прямоугольный треугольник»

1-й вариант

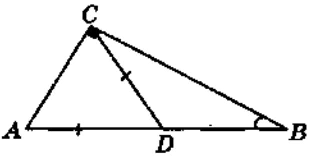
1. В прямоугольных треугольниках ABC ($\angle C$ — прямой) и DEF ($\angle F$ — прямой): $AB = DE$ и $AC = DF$; $\angle ABC = 74°$. Найдите $\angle EDF$.

Ответ: ____________________



2. В треугольнике ACB: угол C — прямой, угол B равен 58°. На гипотенузу AB из точки F катета BC опущен перпендикуляр FG. Найдите угол BFG.

Ответ: ______________________



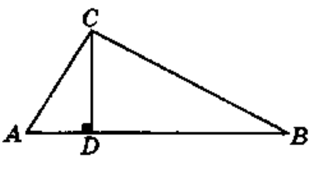
3. Из вершины C треугольника ABC проведена медиана CD, которая отсекает от него равнобедренный треугольник ACD ($AD = CD$). Найдите угол ACB.

Ответ: ______________________

2-й вариант

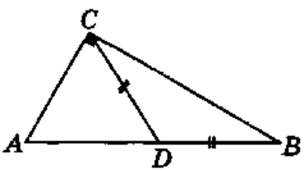
1. В прямоугольных треугольниках ABC ($\angle C$ — прямой) и DEF ($\angle F$ — прямой): $AB = DE$, $AC = 15$ см; $BC = 8$ см; $\angle ABC = 32°$; $\angle FDE = 58°$. Найдите длину DF.

Ответ: ______________________



2. В прямоугольном треугольнике ACB ($\angle C$ — прямой) проведена высота CD. Найдите угол ACD, если $\angle B = 33°$.

Ответ: ______________________



3. В треугольнике ABC проведена медиана CD, которая отсекает от него равнобедренный треугольник CDB ($BD = CD$). Найдите угол CBD, если угол ACD равен 64°.

Ответ: ______________________

Дополнительные задачи

1. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведена высота CD. Докажите, что $\angle ACD = \angle CBD$.

2. В треугольнике ABC проведена высота BD. Определите углы треугольника ABC, если $\angle ABD = 33°$, а $\angle CBD = 36°$.

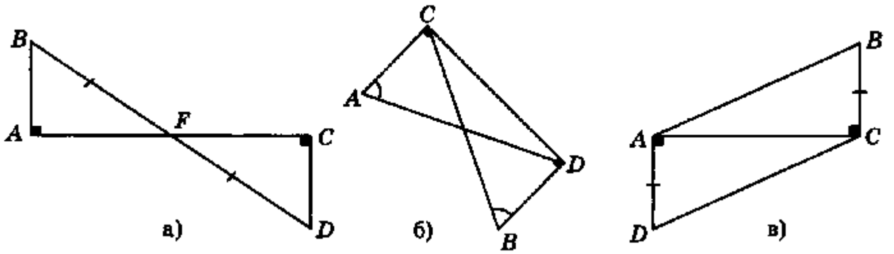


Рис. 127

3. Докажите равенство прямоугольных треугольников по данным рисунков 127 а), б) и в).

4. Докажите равенство двух равнобедренных треугольников по углу при основании и высоте, проведенной к основанию.

5. Докажите равенство двух равнобедренных треугольников по боковой стороне и высоте, проведенной к основанию.

6. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 12 см, а угол при вершине 120°. Определите высоту треугольника.

7. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C$ прямой) проведена высота CD. Найдите длины отрезков AD и BD, если гипотенуза равна 12 см, а $\angle CAB = 30°$.

8*. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C$ — прямой) проведена высота CD. Докажите, что если $\angle CBA = 30°$, то $AB : AD = 4 : 1$.

9*. Докажите, что в равностороннем треугольнике расстояние от точки пересечения двух биссектрис до стороны в два раза меньше расстояния от этой же точки до вершины.

10. Луч AB лежит внутри угла MAK. Докажите, что луч AB является биссектрисой угла MAK, если перпендикуляры BM и BK к сторонам угла равны.

§4. Построение треугольника по трем элементам (2 ч)

Комментарий для учителя

Здесь вводится очень важное понятие *расстояния между параллельными прямыми*, при этом у учащихся формируется наглядное представление о параллельных прямых.

В параграфе рассматривается последний из основных алгоритмов задач на построение с помощью циркуля и линейки. Кроме того, здесь же рассматриваются классические задачи на построение треугольника по трем элементам, каждая из которых соответствует одному из признаков равенства треугольников. На эти задачи следует обратить внимание учащихся, так как они составляют одно из звеньев методической линии: признаки равенства треугольников — задачи на построение треугольника по трем элементам — алгоритмы решения треугольников.

Текущие результаты изучения параграфа 4. Учащиеся должны научиться:

– объяснять понятия *«расстояния от точки до прямой»* и *«расстояния между параллельными прямыми»*, *«перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную прямую»*;

– иллюстрировать, объяснять формулировки и доказывать: теорему о свойстве *перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную прямую*, и *свойство параллельных прямых*;

– объяснять алгоритмы решения задач на построение *треугольника: по двум сторонам и углу между ними, по стороне и прилежащим к ней углам, по трем сторонам*;

– применять при решении задач на вычисления и доказательство:

• свойство *перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную прямую*;

• алгебраический аппарат;

• метод от противного;

– применять при решении задач на построение основные алгоритмы построения с помощью циркуля и линейки.

Методические рекомендации к изложению материала

1°. *Определение перпендикуляра* к прямой было дано в §2 главы II учебника. Его необходимо с учащимися повторить, а после введения *определения наклонной* полезно подчеркнуть, что в обоих случаях речь идет об отрезках.

Для доказательства утверждения о соотношении длин перпендикуляра и наклонной достаточно указать, что перпендикуляр — это катет, а наклонная — гипотенуза в прямоугольном треугольнике.

На закрепление введенной терминологии можно предложить задачи для устного решения:

> Из одной точки M к прямой a проведены перпендикуляр и наклонная, которая образует с прямой угол, равный 30°.
>
> 1) Найдите расстояние от точки M до прямой, если длина наклонной равна 14 см.
>
> 2) Найдите длину наклонной, если расстояние от точки M до прямой равно 11 см.

Затем можно решить задачи **271**, **274** и **276** из учебника.

Доказательство свойства *параллельных прямых* достаточно просто, после выполнения чертежа можно предложить учащимся провести доказательство самостоятельно.

На закрепление теоремы о свойстве *параллельных прямых* можно предложить задачи **278** и **280** из учебника. Задачу **281** из учебника необходимо устно разобрать на уроке. Это поможет учащимся решить дома задачу **282**.

> При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует записать определение *перпендикуляра к прямой*, сформулировать утверждение об *отношении длин перпендикуляра и наклонной* и дать *определение расстояния от точки до прямой*, решить задачу **195**, сформулировать свойство *параллельных прямых*.

2°. В этом параграфе рассматривается пятая задача на построение: *построение треугольника по трем сторонам* — из пяти основных задач на построение.

Построение с помощью циркуля и линейки треугольника по трем сторонам.

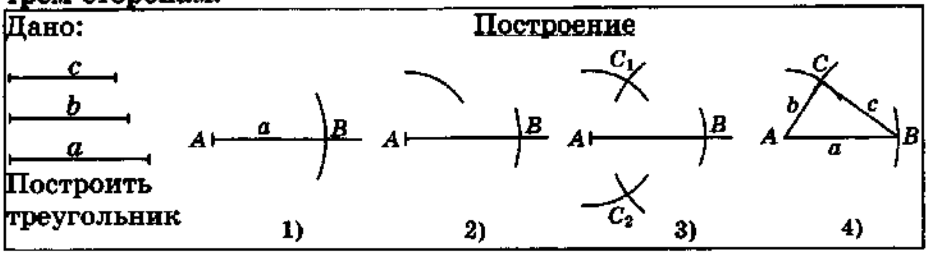


Рис. 128

Описание построения

Пусть a — бо́льшая из трех сторон. Возьмем произвольный луч с началом A и проведем окружность радиуса a с центром в точке A и точку пересечения луча и окружности обозначим B (рис. 128 1). *Проведем еще одну окружность радиуса c с центром в точке A* (рис. 128 2) *и окружность радиуса b с центром в точке B* (рис. 128 3).

Если $a < b + c$, то эти две окружности пересекаются в двух точках C_1 и C_2. Тогда, по построению, треугольники ABC_1 и ABC_2 имеют стороны заданной длины a, b, c (рис. 128 3).

Если $a \geq b + c$, то эти две окружности не пересекаются и задача решения не имеет.

После этого можно предложить учащимся решить задачу:

Постройте равносторонний треугольник по его стороне.

3°. Решение двух других задач, а именно: *построение треугольника по двум сторонам и углу между ними* и *построение треугольника по стороне и прилежащим к ней углам* — используют как последовательные шаги решения основных задач на построение. Для решения обеих задач необходимо уметь откладывать с помощью циркуля на луче отрезок и знать алгоритм построения угла, равного данному.

4°. Задачи на построение традиционно представляют для учащихся определенные сложности, поэтому, какие задачи выполнить в классе и какие рекомендовать для домашней работы, учитель должен принять сам в зависимости от уровня геометрической подготовки класса. Можно предложить в этой теме и индивидуальные задания для учащихся.

Примерное планирование изучения материала

На первом уроке: в классе — изложить весь теоретический материал пункта 38, решить задачи **271**, **274**, **276**; **278**, **280** и **281**; дома — вопросы 14–18 из вопросов для повторения к главе IV, задачи **273**, **275**, **277**, **282** и **283**.

На втором уроке: в классе — изложить весь теоретический материал пункта 39, решение задач; дома — вопросы 19–20 из вопросов для повторения к главе IV.

Систематизация и обобщение знаний по теме «Соотношения между сторонами и углами треугольника»

Комментарий для учителя

1°. В результате систематизации и обобщения знаний по теме «Соотношения между сторонами и углами треугольника» учащиеся должны:

– распознавать и изображать на чертежах и рисунках: остроугольный, прямоугольный, тупоугольный треугольник, внешний угол треугольника;

– выделять в конфигурации, данной в условии задачи: внешний угол треугольника, остроугольный, прямоугольный, тупоугольный треугольник, угол треугольника;

– иллюстрировать, объяснять и доказывать: теоремы о сумме углов треугольника, теоремы о внешнем угле треугольника, признаки равенства прямоугольных треугольников; свойство прямоугольного треугольника, у которого один угол равен 30°; признак равнобедренного треугольника;

– определять вид треугольника по углам, применяя теорему о сумме углов треугольника;

– применять при решении задач на вычисления и доказательство:

- теорему о сумме углов треугольника, теорему о внешнем угле треугольника;
- теорему о соотношении между сторонами и углами треугольника;
- признак равнобедренного треугольника;

• признаки равенства прямоугольных треугольников, свойство прямоугольного треугольника, у которого один угол равен 30°;
• неравенство треугольника;
• метод от противного;
• алгебраический аппарат;

– применять при решении задач на построение основные алгоритмы построения с помощью циркуля и линейки.

2°. При подготовке к контрольной работе можно подобрать задачи из разделов «Дополнительные задачи» учебника и методического пособия в зависимости от уровня подготовки класса. Домашнее задание можно сформировать также из «Дополнительных задач» учебника.

Из сборника тестов авторов Т.М. Мищенко и А.Д. Блинкова «Геометрия. Тесты 7 класс» к учебнику Л.С. Атанасяна и др. издательства «Просвещение» предложить учащимся выполнить тесты 7, 8 и 9, рекомендованные для главы 4 «Соотношения между сторонами и углами треугольника» и направленные на оперативную проверку основных умений, формируемых при изучении этой темы. Поскольку каждый тест имеет четыре варианта, а тестов три, то можно просто использовать все двенадцать вариантов или создать из них один тест, используя часть заданий из каждого теста. Может быть в нескольких вариантах. Первый вариант более приемлемый, так как при разборе заданий позволяет более глубоко и всесторонне систематизировать пройденный материал. Разобрать решения заданий следует сразу после выполнения тестов с активным привлечением учащихся. При этом рекомендуется обратить внимание на задания 6, 7 и 8 всех вариантов теста 9. В этих тестах используется утверждение, обратное утверждению, сформулированному в задаче **231**. Можно предложить учащимся сформулировать это утверждение. Однако на данном этапе мы не можем доказать это утверждение, опираясь на знания учащихся, поэтому можно сообщить учащимся, что это утверждение будет доказано позже. Формулировку «*В прямоугольным треугольнике медиана равна половине гипотенузы*» можно использовать при решении заданий 6, 7 и 8 теста 9.

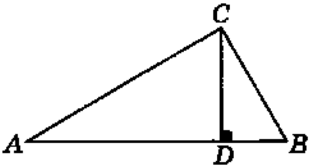
3°. В контрольной работе первые три задачи — это задачи с выбором ответа и со свободным ответом. Надо напомнить учащимся, что делать запись при решении этих задач не следует. В задачах 4–5 решение записывается полностью с записью условия и выполнением чертежа.

Контрольная работа по теме: «Соотношения между сторонами и углами треугольника»

1-й вариант

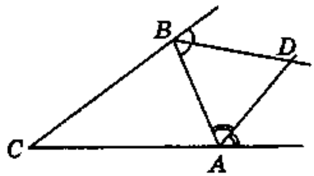
1. Определите вид треугольника, если сумма двух его углов равна третьему углу.
   1. *остроугольный.*
   2. *прямоугольный.*
   3. *тупоугольный.*
   4. *определить невозможно.*

2. В треугольнике ABC внешний и внутренний углы при вершине C равны. Определите, какая из сторон треугольника ABC является наибольшей.
   1. AB; 2. BC; 3. AC; 4. *Определить невозможно.*



3. В прямоугольном треугольнике ABC к гипотенузе AB проведена высота CD. Найдите гипотенузу AB, если $BC = 6$ см, $BD = 3$ см.
   Ответ: ________________

4. В треугольнике ABC на высоте BF отмечена точка O такая, что $AO = OC$. Расстояние от точки O до стороны AB равно 4 см, а до стороны AC — 7 см. Найдите расстояние от точки O до стороны BC.



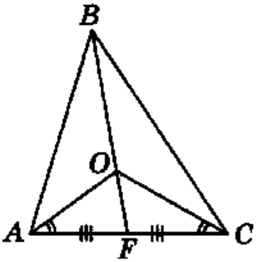
5. В треугольнике ABC биссектрисы внешних углов при вершинах B и A пересекаются в точке D. Найдите $\angle BCA$, если $\angle BDA = 70°$.
   Ответ: ________________

2-й вариант

1. Определите вид треугольника, если сумма двух его углов меньше третьего угла.
   1. *остроугольный.*
   2. *прямоугольный.*
   3. *тупоугольный.*
   4. *определить невозможно.*

2. В треугольнике ABC внешние углы при вершинах A и B равны, а внешний угол при вершине C равен его внутреннему углу. Определите, какая из сторон треугольника ABC является наибольшей.

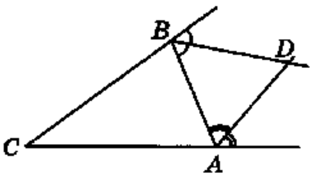
1. AB; 2. BC; 3. AC; 4. *Определить невозможно.*



3. В треугольнике ABC на медиане BF отмечена точка O такая, что $\angle CAO = \angle OCA$. Расстояние от точки O до стороны AB равно 8 см, а до стороны AC — 5 см. Найдите расстояние от точки O до стороны BC.

Ответ: ____________________

4. В прямоугольном треугольнике ABC к гипотенузе AB проведена высота CD. Найдите отрезок AD, если угол CBA равен 30°, а гипотенуза AB равна 8 см.



5. В треугольнике ABC биссектрисы внешних углов при вершинах B и A пересекаются в точке D. Найдите $\angle BDA$, если $\angle BCA = 40°$.

Ответ: ____________________

Приложение 1

ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

№ §	Тема	Число часов

Глава I. Начальные геометрические сведения (10 ч.)

1.	Прямая и отрезок	1ч
2.	Луч и угол. Сравнение отрезков и углов	1ч
3.	Измерение отрезков. Измерение углов	3ч
4.	Перпендикулярные прямые	2ч
5.	Систематизация и обобщение знаний	1ч
6.	Контрольная работа	1ч
7.	Резерв	1ч

Глава II. Треугольники (15 ч.)

1.	Первый признак равенства треугольников	2ч
2	Медианы, биссектрисы и высоты треугольников	3ч
3.	Второй и третий признаки равенства треугольников	3ч
4.	Задачи на построение	1ч
5.	Систематизация и обобщение знаний	1ч
6.	Контрольная работа	1ч
7.	Резерв	3ч

Глава III. Параллельные прямые (8 ч.)

1.	Признаки параллельности прямых	1
2	Аксиома параллельных прямых	4ч
3.	Систематизация и обобщение знаний	1ч
4.	Контрольная работа	1ч
5.	Резерв	1ч

Глава IV. Соотношения между сторонами и углами треугольника (13 ч.)

1.	Сумма углов треугольника	1ч
2.	Соотношения между сторонами и углами треугольника	3ч
3.	Прямоугольный треугольник	3ч

4.	Построение треугольника по трем элементам	2ч
5.	Систематизация и обобщение знаний	1ч
6.	Контрольная работа	1ч
7.	Резерв	2ч

Заключительное повторение (4 ч.)

	Систематизация и обобщение знаний	2ч
	Контрольная работа	1ч
	Подведение итогов	1ч

Приложение 2

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕСТОВ ПРИ ТЕМАТИЧЕСКОМ ПОВТОРЕНИИ

В конце изучения каждой темы отводится время на тематическое повторение, систематизацию и обобщение знаний учащихся. Для учителя, да и самих учащихся важно при переходе к повторению иметь представления о знаниях учащихся по ключевым вопросам темы: знание фактического материала и умение его использовать в ситуации «прямого применения» — тем самым зафиксировать факт достижения или недостижения учащимися обязательного уровня подготовки. В этом случае целесообразно провести тестирование. Результаты тестирования помогут учителю организовать повторение более целенаправленно и с учетом уровня усвоения пройденной темы классом. Контрольная работа проводится в конце темы после корректировки знаний учащихся по результатам тестирования.

Основная цель проведения тестирования состоит в проверке достижения уровня обязательной математической подготовки как каждым учеником, так и всем классом. По сравнению с другими видами контроля (зачет, самостоятельная или контрольная работы) тест позволяет при минимальных затратах времени проверить усвоение значительного по объему учебного материала.

Предлагаемые тематические тесты позволяют: проверить основные знания по теме; проследить за поддержанием уровня, необходимого для учебной деятельности, важнейших положений всего курса и усвоением общеинтеллектуальных умений и навыков, таких как: *умение подводить под определение, выстраивать логическую цепочку рассуждений, правильно оценивать ситуацию.*

Одними из важнейших умений, приобретаемых в курсе планиметрии, а с другой стороны, и одними из важнейших условий, способствующих успешному усвоению не только математики, но и других учебных дисциплин, являются умения: *понимать текст задачи, выделять в тексте задачи условие и заключение, читать и делать чертежи, сопровождающие за-*

дачи, при чтении чертежа выделять конфигурацию, необходимую на данном шаге (этапе) решения задачи.

Задания тематических тестов позволяют проверить эти умения. Кроме этого каждый тематический тест проверяет умение непосредственно применять основные теоремы, свойства и признаки фигур, вычислять, применяя соответствующие теоретические знания, элементы фигур.

Предлагаемые здесь тесты составляют единое целое с контрольными работами, данными в методическом пособии: некоторые задания контрольных работ повторяют задания тестов. Но если в тесте ученик на вопрос задания отвечает коротко, то в контрольной работе от него требуется обоснование ответа.

Не все темы курса седьмого класса равнозначны. Анализ разделов программы «Требования к математической подготовке учащихся» и «Тематическое планирование» позволил выделить две ключевые темы: *«Равенство треугольников»* и *«Сумма углов треугольника»*, по которым кроме контрольных работ можно порекомендовать провести и тестирование.

Целью каждого из приведенных тестов является оперативная проверка достижения учащимися обязательного уровня подготовки по изученной теме. Задания теста направлены на проверку основных умений, формируемых при изучении темы.

При этом опосредованно проверяются следующие умения:

– понимать условие задачи, владеть соответствующей терминологией и символикой;

– читать чертежи, сопровождающие текст задачи, сопоставлять текст задачи с данным чертежом, выделять на чертеже необходимую при решении задачи конфигурацию.

Выполнение теста оценивается одной из оценок *«Зачет»* или *«Незачет»*. Оценка *«Зачет»* ставится, если выполнено не менее шести из девяти заданий.

Каждый тест рассчитан на 25 минут.

Признаки равенства треугольников.

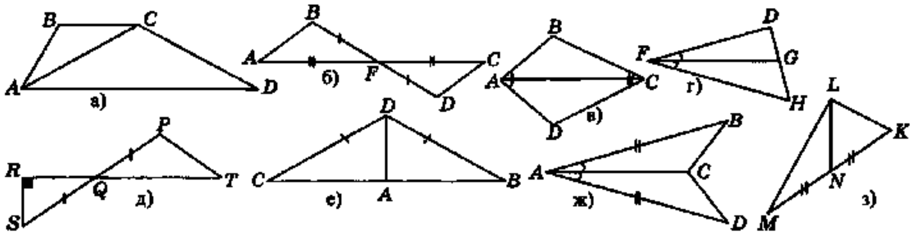
Задания теста направлены на проверку основных умений, формируемых при изучении темы «Равенство треугольников»:

– распознавать на чертежах равные треугольники по указанным равным элементам, применяя признаки равенства треугольников;

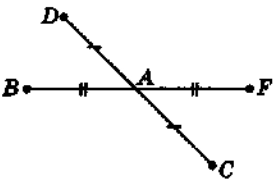
– непосредственно применять признаки равенства треугольников;
– делать выводы из равенства треугольников;
– вычислять значения длин сторон, градусную меру углов, периметры треугольников, применяя признаки равенства треугольников, признак и свойство равнобедренного треугольника.

1-й вариант

1. Укажите, на каком из нижеприведенных рисунков есть равные треугольники.

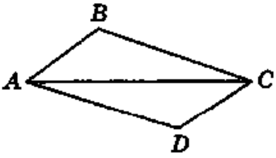


Ответ: а) ; б) ; в) ; г) ; д) ; е) ; ж) ; з) .



2. На рисунке $AD = AC$, $AB = AF$. В силу какого признака равенства треугольников $\Delta BAD = \Delta FAC$?

Ответ: а) по двум сторонам и углу между ними;
б) по стороне и прилежащим к ней углам;
в) по трем сторонам.

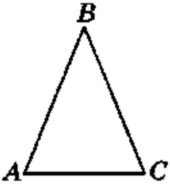


3. На рисунке $AD = BC$, $AB = DC$. В силу какого признака равенства треугольников $\Delta ABC = \Delta CDB$?

Ответ: а) по двум сторонам и углу между ними;
б) по стороне и прилежащим к ней углам;
в) по трем сторонам.

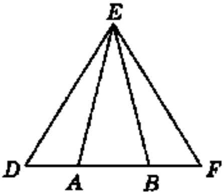
4. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 7 см, а основание — 4 см. Вычислите периметр треугольника.

*Ответ:*________________



5. В равнобедренном треугольнике ABC основание AC равно 7 см, а периметр равен 17 см. Вычислите боковую сторону AB.

Ответ: $AB =$ __________ см.



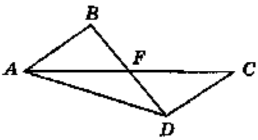
6. На рисунке $\Delta DEA = \Delta FEB$. Определите вид ΔAEB.

Ответ: ΔAEB *является:*

а) *разносторонним;*

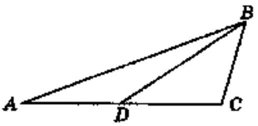
б) *равносторонним;*

в) *равнобедренным.*



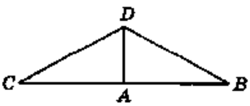
7. В треугольнике ABD: отрезок AF является медианой. Сравните длины отрезков BF и FD.

Ответ: а) $BF > FD$; б) $BF < FD$; в) $BF = FD$.



8. В треугольнике ABC: $\angle ABC = 90°$, $AD = BD = DC$, $\angle BAD = 64°$. Найдите $\angle DCB$.

Ответ: $\angle DCB =$ __________.



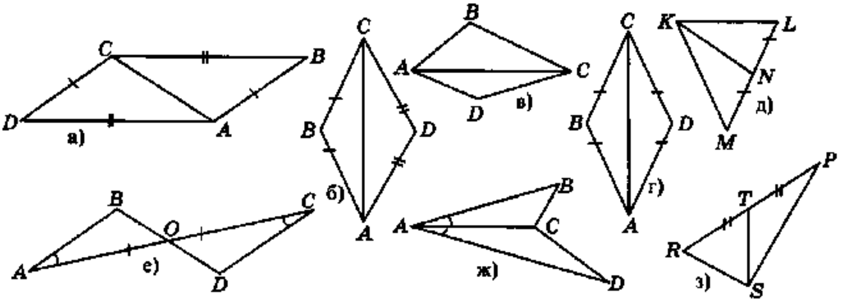
9. Отрезок DA — медиана равнобедренного треугольника BDC с основанием CB;

$\angle D = 120°$. Найдите углы ΔADC.

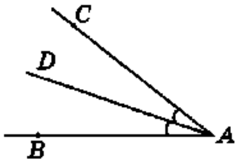
Ответ: $\angle DCA =$ __; $\angle ADC =$ __; $\angle CAD =$ __.

2-й вариант

1. Укажите, на каком из нижеприведенных рисунков есть равные треугольники.



Ответ: а) ; б) ; в) ; г) ; д) ; е) ; ж) ; з) .

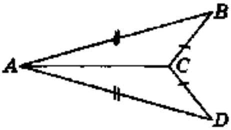


2. Луч AD — биссектриса $\angle BAC$, $AB = AC$. В силу какого признака равенства треугольников $\Delta BAD = \Delta CAD$?

Ответ: а) по двум сторонам и углу между ними;

б) по стороне и прилежащим к ней углам;

в) по трем сторонам.



3. На рисунке $AD = AB$, $BC = DC$. В силу какого признака равенства треугольников $\Delta BAC = \Delta DAC$?

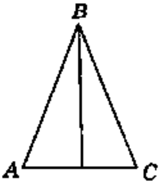
Ответ: а)по двум сторонам и углу между ними;

б)по стороне и прилежащим к ней углам;

в)по трем сторонам.

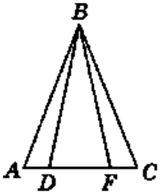
4. В равностороннем треугольнике сторона равна 7 см. Вычислите периметр треугольника.

*Ответ:*__________________________



5. В равнобедренном треугольнике ABC боковая сторона AB равна 7 см, а периметр равен 17 см. Вычислите основание AC.

Ответ: AC = _____________ см.



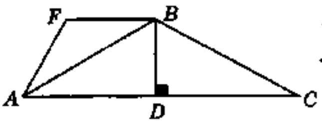
6. На рисунке $\Delta ABD = \Delta CBF$. Определите вид ΔDBF.

Ответ: ΔDBF является:

а) разносторонним;

б) равносторонним;

в) равнобедренным.

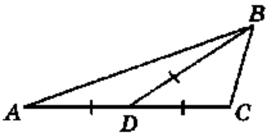


7. В треугольнике ABC отрезок BD является высотой. Определите взаимное расположение прямых BD и AC.

Ответ: а) BD перпендикулярна AC;

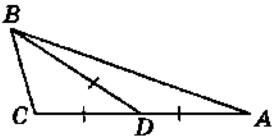
б) BD параллельна AC;

в) BD и AC пересекаются под острым углом.



8. В треугольнике ABC: $AD = BD = DC$, $\angle A = 53°$. Найдите $\angle ABC$.

Ответ: $\angle ABC =$ ________.



9. Отрезок DB — медиана треугольника ABC, ΔADB — равносторонний, $\angle BCA = 30°$. Определите углы ΔBDC.

Ответ: $\angle DCB =$ ____; $\angle BDC =$ ____; $\angle CBD =$ ____.

Сумма углов треугольников.

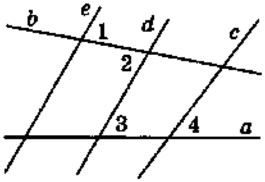
Задания теста направлены на проверку основных умений, формируемых при изучении темы «Сумма углов треугольника»:

– распознавать на чертежах равные треугольники по указанным равным элементам, применяя признак равенства прямоугольных треугольников;

– непосредственно применять признаки и свойства параллельных прямых, теорем о сумме углов треугольника и о внешнем угле треугольника;

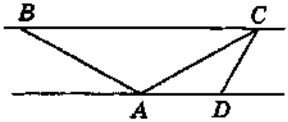
– вычислять значения длин сторон, градусную меру углов, периметры треугольников, применяя теорему о сумме углов треугольника и ранее изученные признаки и свойства треугольников.

1-й вариант



1. На рисунке $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 \neq \angle 4$. Какие из прямых c, d, e параллельны?

Ответ: а) $c \parallel d$; б) $c \parallel e$; в) $c \parallel d \parallel e$; г) $e \parallel d$.

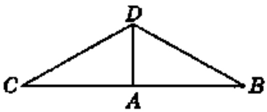


2. На рисунке $BC \parallel AD$. $\angle BCA$ равен 34°. Чему равен $\angle DAC$?

Ответ: $\angle DAC =$ ________.

3. Треугольник ABC — равносторонний. Найдите его углы.

Ответ: $\angle BAC =$ ______, $\angle ABC =$ ________, $\angle ACB =$ ________.



4. В равнобедренном треугольнике CDB ($CD = BD$), $\angle BDC = 120°$, боковая сторона равна 12 см. Определите высоту DA.

Ответ: а) $DA = 24$ см;

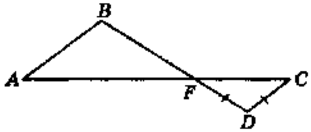
б) $DA = 6$ см;

в) $DA = 12$ см;

г) $DA = 30$ см.

5. Может ли в треугольнике быть два прямых угла?

Ответ: ________________



6. ΔCDF — равнобедренный ($FD = DC$), $AB \parallel CD$. Укажите соответственно равные углы в треугольниках ABF и FDC.

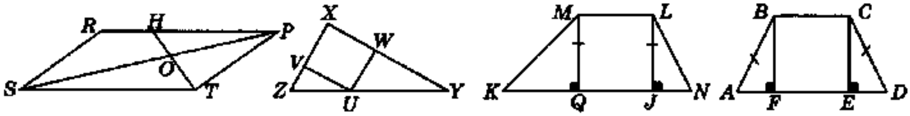
Ответ: $\angle BAF =$ ____;

$\angle BFA$ ______; $\angle ABF =$ ______.

7. Могут ли у треугольника быть два внешних угла тупыми?

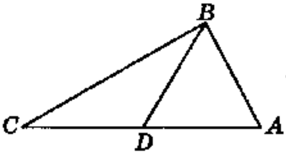
Ответ: ________________

8. На каком из нижеприведенных рисунков имеются равные треугольники?



а) б) в) г)

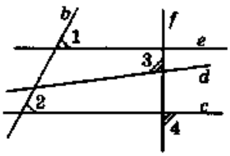
Ответ: а) ; б) ; в) ; г) .



9. Отрезок BD — медиана треугольника ABC, ΔDAB — равносторонний. Определите углы ΔCDB.

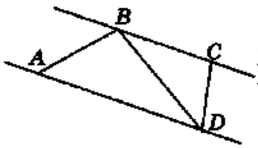
Ответ: $\angle CBD =$ ______ ; $\angle BDC =$ ______ ; $\angle BCD =$ ______ .

2-й вариант



1. На рисунке $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 > \angle 4$. Какие из прямых c, d, e параллельны?

Ответ: а) $c \| d$; б) $c \| e$; в) $c \| d \| e$; г) $e \| d$.

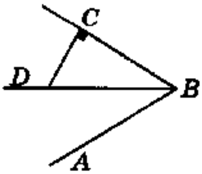


2. На рисунке $BC \| AD$. $\angle CBD$ равен 23°. Чему равен $\angle BDA$?

Ответ: $\angle BDA =$ ______ .

3. Треугольник ABC — прямоугольный, равнобедренный ($AB = BC$). Найдите его углы.

Ответ: $\angle CAB =$ ______ ; $\angle ABC =$ ______ ; $\angle BCA =$ ______ .

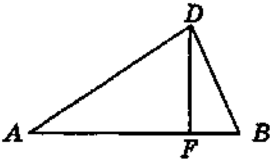


4. Точка D лежит на биссектрисе угла CBA. $\angle CBA = 60°$, $BD = 10$ см, $DC \perp CB$. Определите длину отрезка CD.

Ответ: а) $CD = 20$ см; б) $CD = 10$ см; в) $CD = 5$ см; г) $CD = 30$ см.

5. Может ли в треугольнике быть два тупых угла?

Ответ: ______________



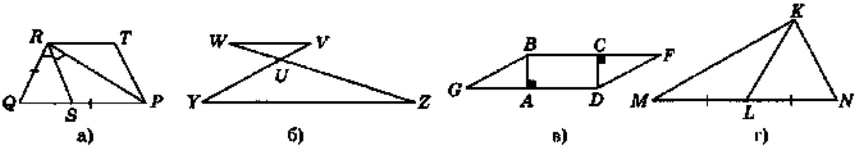
6. Отрезок DF — высота прямоугольного треугольника ADB ($\angle ADB$ — прямой). Укажите соответственно равные углы в треугольниках ADF и ADB.

Ответ: $\angle ADB =$ ______; $\angle DAB =$ ______; $\angle ABD =$ ______.

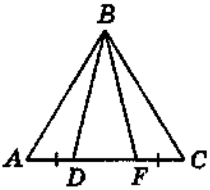
7. Могут ли у треугольника быть два внешних угла прямыми?

Ответ: ____________________

8. На каком из нижеприведенных рисунков имеются равные треугольники?



Ответ: а) ; б) ; в) ; г) .



9. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) от вершин при основании отложены равные отрезки $AD = CF$. Определите углы ΔDBF, если $\angle BFC = 110°$.

Ответ: $\angle BDF =$ ______; $\angle DBF =$ ______; $\angle BFD =$ ______.

Приложение 3

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОЕ ПОВТОРЕНИЕ

При распределении учебного времени на заключительное повторение в конце учебного года предлагается два урока отвести на систематизацию и обобщение знаний, один урок — на контрольную работу и заключительный урок — для подведения итогов.

На заключительное повторение рекомендуется вынести ключевые темы курса:

1. Теоремы о смежных и вертикальных углах.
2. Признаки равенства треугольников.
3. Признак и свойство углов равнобедренного треугольника.
4. Свойство медианы равнобедренного треугольника.
5. Неравенство треугольника.
6. Признаки и свойства параллельности прямых.
7. Свойства углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых третьей прямой (формулировки и примеры).
8. Теорема о сумме углов треугольника (формулировка и пример).
9. Теорема о внешнем угле треугольника.
10. Построение с помощью циркуля и линейки:
    1. треугольника по трем сторонам;
    2. угла, равного данному;
    3. биссектрисы угла;
    4. прямой, перпендикулярной данной прямой;
    5. деление отрезка пополам с помощью циркуля и линейки.

При этом можно рекомендовать провести систематизацию и обобщение знаний в ходе беседы, возникающей при решении задач. Тем самым основное внимание уделяется не повторению доказательств теорем, а повторению методов и способов решения задач, основанных на теоретическом материале данной темы.

Примеры задач, рекомендуемых для проведения повторения

Базовый уровень.

1. На рисунке 1 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 \neq \angle 4$. Определите, какие из трех прямых c, d, e параллельны.

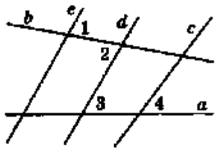


Рис. 1

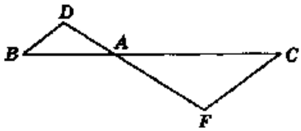


Рис. 2

2. В треугольниках ADB и AFC: $AD = DB$, $AF = FC$. Докажите, что $DB \parallel FC$ (рис. 2).

3. В треугольнике ABC $AB = AC$, проведена биссектриса AD угла BAC. Докажите равенство треугольников BAD и CAD.

4. В треугольниках BAD и CDA стороны BD и AC, а также углы ADB и DAC — равны (рис. 3). Докажите равенство треугольников BAD и CDA.

5. В треугольнике FGD проведена биссектриса GE угла FGD. Докажите равенство треугольников LEG и KEG, если $\angle LEG = \angle KEG$ (рис. 4).

6. Две окружности с центрами O и O_1 пересекаются в точках A и B. Докажите, что $\Delta OAO_1 = \Delta OBO_1$.

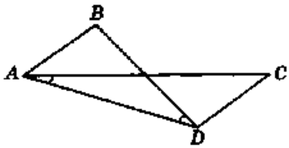


Рис. 3

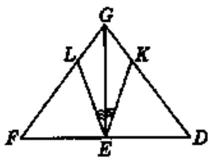


Рис. 4

7. Даны две концентрические окружности с центром в точке O. AC и BD — диаметры этих окружностей. Докажите, что $\Delta ABO = \Delta CDO$.

8. В равнобедренном треугольнике основание равно 7 см, а периметр равен 17 см. Вычислите боковую сторону треугольника.

9. Отрезок BD — медиана равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$). Найдите ее длину, если периметр треугольника ABC равен 50 см, а периметр ΔABD равен 30 см.

10. В прямоугольном равнобедренном треугольнике гипотенуза равна 12 см. Определите высоту треугольника, опущенную из прямого угла.

11. На сторонах угла Q отложены равные отрезки QR и QP. Через точки R и P проведена прямая. Определите $\angle RQP$, если $\angle RPQ = 67°$.

12. Докажите, что в равнобедренном треугольнике внешние углы при основании равны.

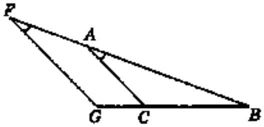


Рис. 5

13. В треугольнике FBG сторона FG равна стороне BG. $\angle BFG = \angle BAC$. Докажите, что ΔABC — равнобедренный (рис. 5).

14. Докажите, что общая хорда двух пересекающихся окружностей перпендикулярна линии центров.

15. Найдите углы равнобедренного треугольника, если угол при вершине равен 72°.

16. Найдите углы равнобедренного треугольника, если внешний угол при основании равен 112°.

17. Чему равна сумма острых углов прямоугольного треугольника?

18. Найдите градусные меры внешних углов равностороннего треугольника.

19. Найдите внешний угол при основании прямоугольного равнобедренного треугольника.

20. В равностороннем треугольнике ABC проведена высота BD. Найдите углы треугольника ABD.

21. В треугольнике ABC точка M является точкой пересечения биссектрис. Угол при вершине A равен 64°, а при вершине C равен 42°. Найдите углы треугольника AMC.

22. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 12 см, а угол при вершине 120°. Определите высоту треугольника.

23. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C$ — прямой) проведена высота CD. Найдите длины отрезков AD и BD, если гипотенуза равна 12 см, а $\angle CBA = 30°$.

24. С помощью циркуля и линейки постройте треугольник:

1. по двум сторонам и углу между ними;
2. по стороне и двум прилежащим к ней углам.

25. Основание треугольника равно 6 см, один из углов при основании равен 120°, сторона, лежащая против этого угла, равна 14 см. Найдите третью сторону.

26. Углы треугольника равны 40° и 60°. Определите, против какого угла треугольника лежит большая сторона.

Профильный уровень.

1. Луч k проходит между сторонами угла gh, градусная мера которого равна 2α. Найдите градусную меру угла, образованного биссектрисами углов gk и kh.

2. Лучи k и t проходят между сторонами угла gh, градусная мера которого равна 70°. Угол, образованный биссектрисами углов gk и th, равен 47°. Найдите градусную меру угла kt.

3. Докажите, что биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника параллельна его основанию.

4. Сформулируйте и докажите первый (второй и третий) признак равенства равнобедренных треугольников.

5. Сформулируйте и докажите признак равенства равносторонних треугольников.

6. Докажите равенство двух равнобедренных треугольников по углу при основании и высоте, проведенной к основанию.

7. Докажите равенство двух равнобедренных треугольников по боковой стороне и высоте, проведенной к основанию.

8. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C$ — прямой) проведена высота CD. Докажите, что если $\angle CBA = 30°$, то $AB : BD = 4 : 3$.

9. На боковых сторонах равнобедренного треугольника во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники. Докажите, что отрезки, соединяющие вершины равносторонних треугольников (отличные от вершин равнобедренного треугольника) с серединой основания равнобедренного треугольника, равны.

10. Периметр равностороннего треугольника равен 36 см, а периметр равнобедренного — 40 см. Найдите стороны данных треугольников, если они имеют общее основание.

11. В равнобедренном треугольнике KLM с основанием KM проведены биссектрисы углов при основании KN и MP, которые пересекаются в точке O. Докажите, что ΔNOP — равнобедренный.

12. Могут ли у треугольника быть два внешних угла — острыми? А три внешних угла треугольника могут быть острыми?

13. Докажите, что если один из внешних углов треугольника в два раза больше внутреннего не смежного с ним угла, то треугольник — равнобедренный.

14. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C$ — прямой) проведена высота CD. Докажите, что если $\angle CBA = 30°$, то $AB : AD = 4 : 3$.

15. Докажите, что в равностороннем треугольнике расстояние от точки пересечения двух биссектрис до стороны в два раза меньше расстояния от этой же точки до вершины.

16. Докажите, что если три окружности имеют общую хорду, то их центры расположены на одной прямой.

17. Найдите геометрическое место середин равных хорд окружности.

18. С помощью циркуля и линейки постройте угол, равный 60°, 30°, 45°.

19. 1. С помощью циркуля и линейки разделите угол на четыре равные части.

2. Объясните, можно ли любой угол разделить на три равные части?

3. С помощью, циркуля и линейки разделите угол, равный 90°, 45°, 135°, на три равные части.

Справочное издание

Мищенко Татьяна Михайловна

Дидактические материалы и методические рекомендации для учителя по геометрии

7 класс

к учебнику Л. С. Атанасяна и др.
«Геометрия. 7–9 классы»

Издательство ***«ЭКЗАМЕН»***

Гигиенический сертификат
№ РОСС RU. АЕ51. Н 16678 от 20.05.2015 г.

Главный редактор *Л. Д. Лаппо*
Редактор *И. М. Бокова*
Технический редактор *Л. В. Павлова*
Корректоры *Т. И. Шитикова, В. М. Шабаршина*
Дизайн обложки *А. А. Козлова*
Компьютерная верстка *К. А. Реутова*

107045, Москва, Луков пер., д. 8.
www.examen.biz
E-mail: по общим вопросам: info@examen.biz;
по вопросам реализации: sale@examen.biz
тел./факс 8 (495) 641-00-30 (многоканальный)

Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, том 2; 953005 — книги, брошюры,
литература учебная

Отпечатано в «Красногорская типография»
143405, Московская область,
г. Красногорск, Коммунальный квартал, 2
www.ktprint.ru

По вопросам реализации обращаться по тел.:
8 (495)641-00-30 (многоканальный).